

***COURS  
PROPULSION - HELICE***

---

***VOLUME I***

---

***Stéphane CORDIER***

Novembre 1996

**TABLE DES MATIERES**

1. INTRODUCTION.....	2
2. GEOMETRIE.....	13
3. ELEMENTS DE CONCEPTION .....	20
4. SIMILITUDE .....	34
5. PROPULSION ET RENDEMENTS .....	45
6. SERIES SYSTEMATIQUES .....	54
7. DISQUE MOTEUR .....	58

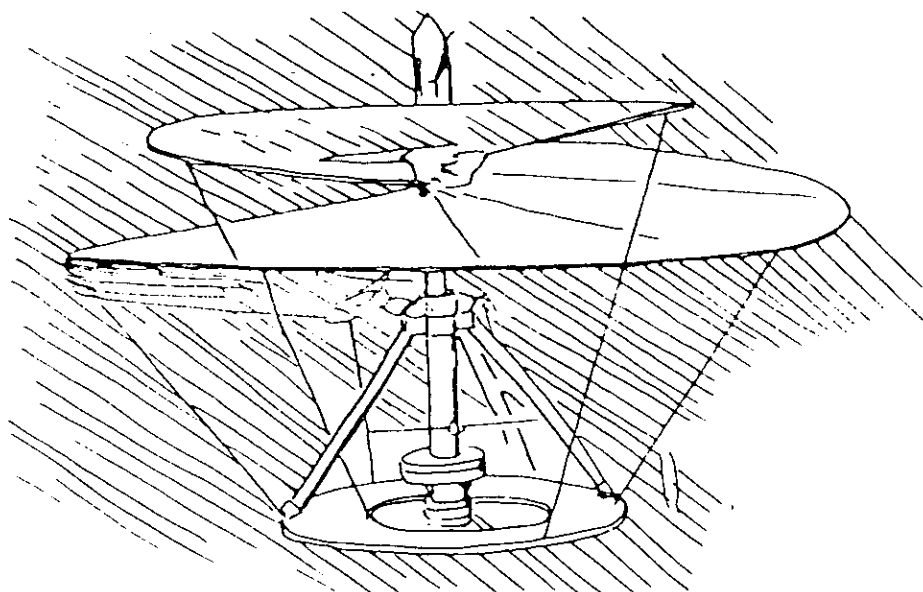
# **1. INTRODUCTION**

## INTRODUCTION -1

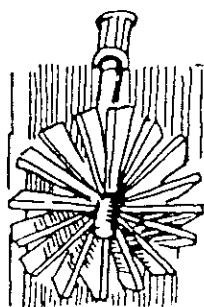
### HISTOIRE

#### Premières idées:

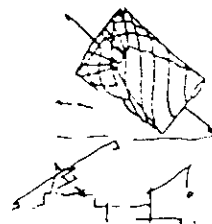
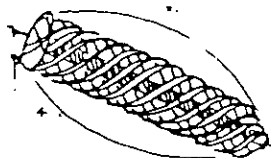
- |                       |                   |           |
|-----------------------|-------------------|-----------|
| • Pompe à vis         | Archimède         | III Av JC |
| • Rotor d'hélicoptère | Léonardo de Vinci | XVIème    |
| • Hydrojet            | Blasco de Garay   | 1543      |
| (hélice en tunnel)    | Toogood & Hays    | 1661      |
|                       | Rumsey            | 1787      |
| • Hélice              | Hook (UK)         | 1680      |



LEONARDO'S AERIAL SCREW OR HELICOPTER



A REACTION WHEEL



MOVING SPIRAL FOR RAISING WATER

Schémas de Leonardo da Vinci

## INTRODUCTION - 2

### HISTOIRE (suite)

#### L'age de la vapeur avec les roues à aubes:

Les roues à aubes étaient particulièrement bien adaptées à des moteurs à vapeur très lents tels qu'ils étaient existaient au début des machines à vapeur. Ce mode de propulsion s'est développé à partir de 1800:

- Symington (UK) 1801 *Charlotte Dundas*
- Fulton (US) 1807 *Clermont*
- 1er paquebot (US) 1819 *Savannah*
- Dernier paquebot (UK) 1861 *Scotia*

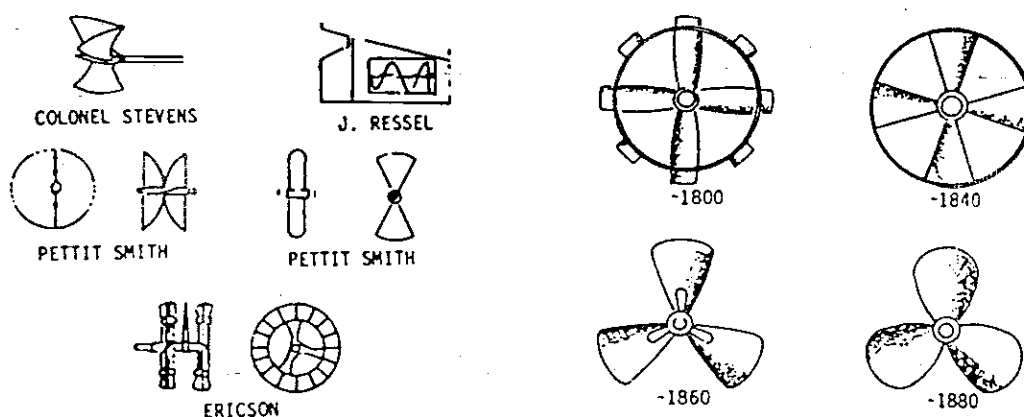
Le déclin des roues à aubes et des grands voiliers correspond au développement des hélices qui ont pour avantage principal, outre un encombrement plus faible, de ne pas être sensible aux changements d'assiette (enfoncement) ainsi qu'aux mouvements sur houle (roulis pour des aubes latérales).

#### Précurseurs des hélices:

L'hélice est apparue vers 1800 dans plusieurs pays:

- Col Stevens (US) 1802 Hélice + vapeur. sans suite
- Russel (A) 1828 18 m x 6 noeuds sans suite
- Sauvage (F) 1832 sans suite
- Ericsson (S puis US) 1836 succès commercial
- Smith (UK) 1836 succès commercial

Les premières hélices nécessitaient un multiplicateur compte tenu des faibles vitesses de rotation des machines à vapeur. Avec le développement de machines à piston plus rapide à plus haute pression, puis de turbines à vapeur cette fois avec réducteur, l'hélice s'est imposée comme mode de propulsion marine jusqu'à nos jours.



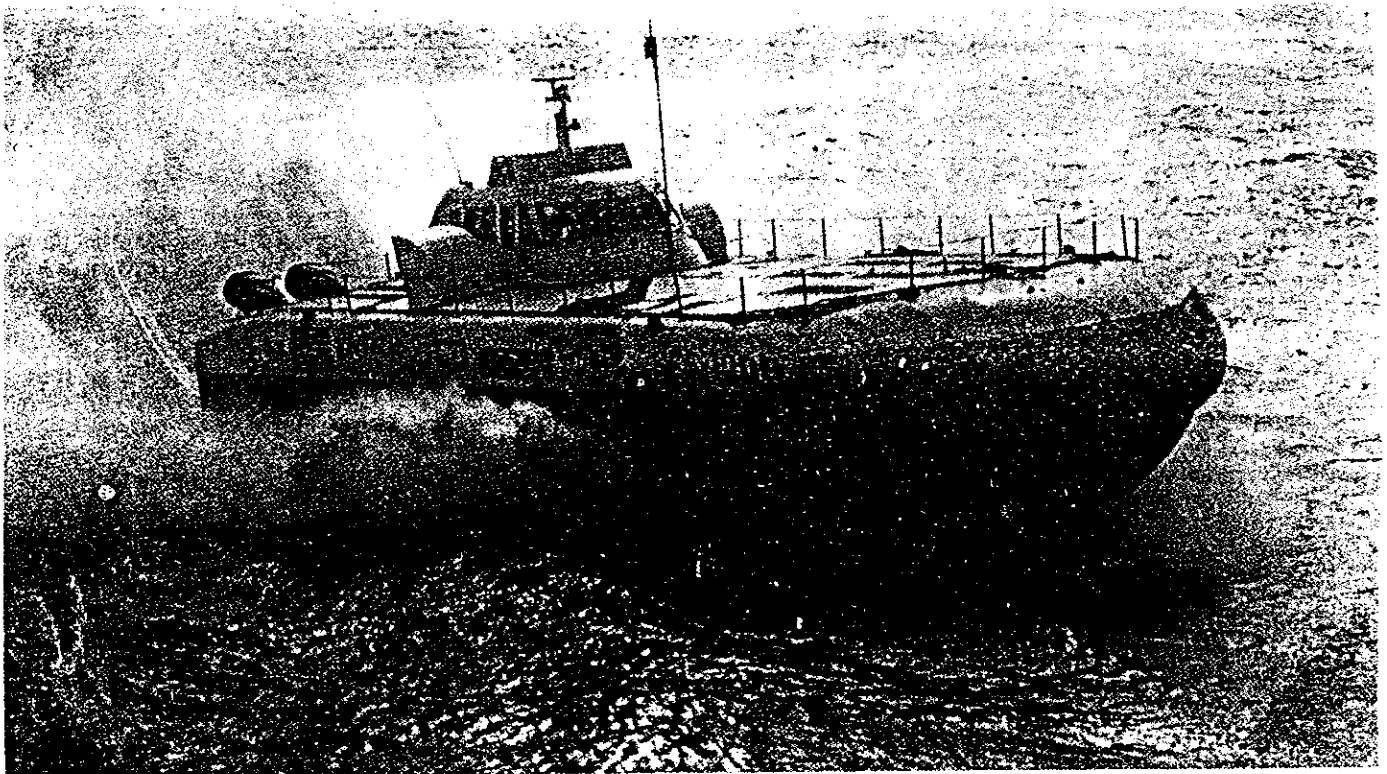
Evolution des premières hélices

## INTRODUCTION- 3

### HISTOIRE (suite)

#### Premières grandes réalisations

- Paquebot (1 500 Cv 11 noeuds) UK 1839 *Great Britain*  
Premières: taille du navire, voyages transatlantiques
- Torpilleur (2 000 Cv 34,5 noeuds) UK 1897 *Turbina*  
Premières: turbine à vapeur, hélices tandem, vitesse > 30 noeuds, essais de cavitation
- Torpilleur (100 000 Cv 45 noeuds) F 1925 *Le Terrible*  
Premières: vitesse, densité de puissance
- NES (3 000 Cv 90 noeuds) US 1976 *SES100 B*  
Premières: hélice semi immergée, vitesse de 90 noeuds, NES

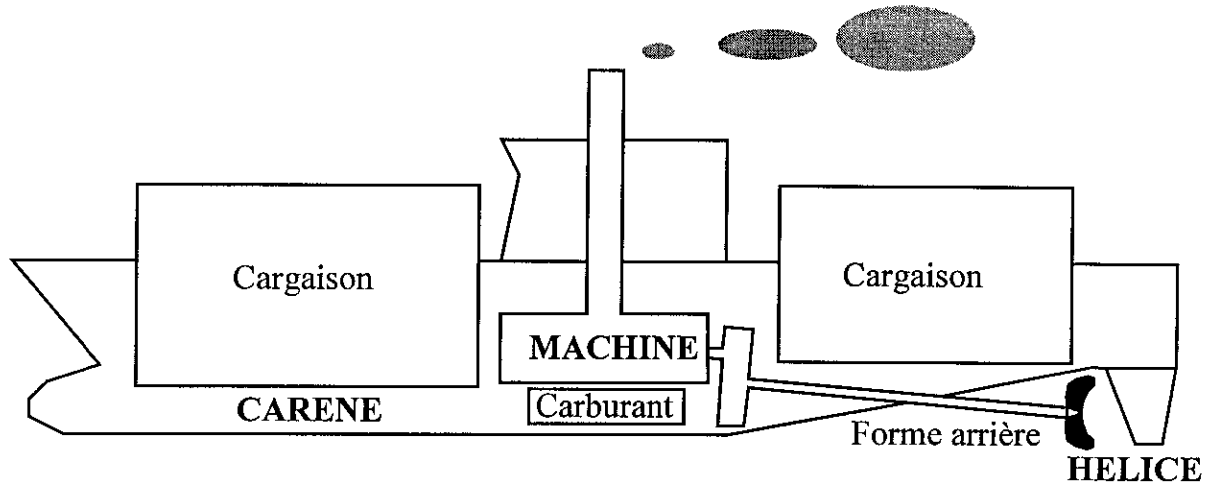


SES 100 B: 90 noeuds, hélices semi-immergées

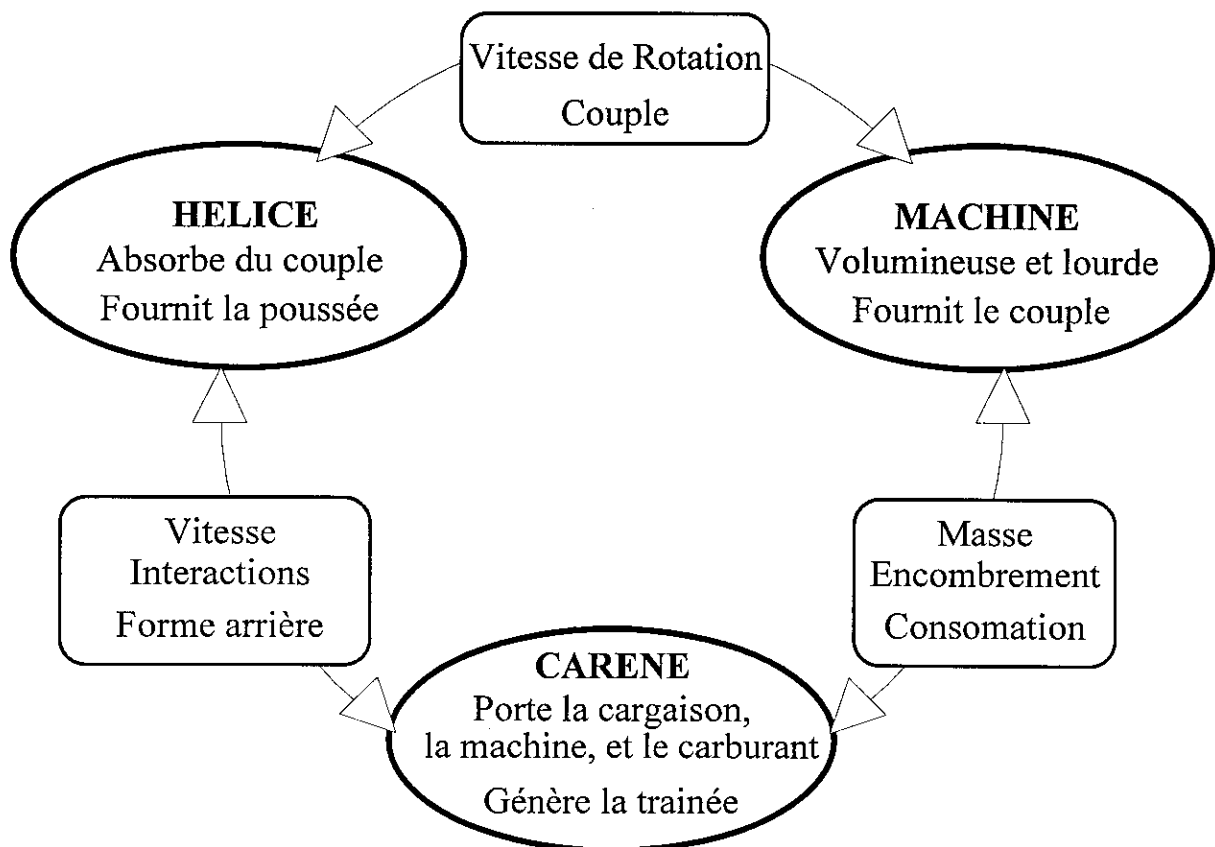
## INTRODUCTION- 4

### SYSTEME HELICE- NAVIRE

Dans le problème global du propulseur (type, dimensionnement, performances), il faut prendre en compte la totalité du navire dont on distingue les composants essentiels: la carène, la machine, et le propulseur, le plus souvent une hélice.



On illustre sur le schéma ci-dessous les principales interactions entre ces 3 composants:



SCHEMATISATION DES INTERACTIONS

## INTRODUCTION- 5

### LE PROPULSEUR DANS LA CONCEPTION DU NAVIRE

L'architecte naval ou l'armateur, lors de la définition d'un bâtiment (submersible ou navire de surface) est amené à faire de nombreux choix de conception dans des domaines divers (dimension de la carène, vitesse maximale, motorisation) compte tenu de l'affectation ultérieure du bâtiment et des moyens disponibles. Ces choix ont une incidence directe sur la conception du propulseur qui doit aboutir à la meilleure adéquation possible entre ces contraintes de conception, les objectifs propulsifs à atteindre (vitesse du bateau, rendement de l'hélice, bruit rayonné), et un coût. On peut illustrer cette interdépendance avec des exemples de modifications qui ont nécessité la fabrication d'un nouveau propulseur:

- augmentation du déplacement
- changement de machine (vapeur>diesel)
- allongement de la carène
- limitation de la longueur de la carène
- réduction des vibrations (confort)
- amélioration de la discrétion acoustique.

Enumérées ci-après quelques contraintes de conception qui peuvent aussi interagir avec le choix, le nombre, le diamètre ou la géométrie du propulseur:

- Points de fonctionnement variables (chalutier en route libre ou en chalutage, pétrolier en charge ou sur ballast, sous-marin en route libre ou en accélération).
- Emergence de l'hélice lorsque le navire est vide.
- Extrémité des pales à l'intérieur d'un gabarit largeur/tirant d'eau.
- Inclinaison et divergence de la ligne d'arbre (et de l'hélice par rapport à l'écoulement) dépendent de la forme de la carène, de la taille du réducteur, de l'agencement de la machine dans le navire, du diamètre de l'hélice....
- Champ de vitesse en aval de la carène et en amont de l'hélice: *le sillage*.
- Poids du propulseur et couple à fournir qui déterminent la ligne d'arbre et les paliers.
- Méthode d'inversion de la poussée: pales fixes si la machine peut inverser le sens de rotation, sinon hélice à pas variable.
- Redondance ou sécurité peuvent conditionner le nombre des propulseurs.
- Nombre de pales ne peut être égal ou sous-multiple du nombre de cylindres.
- etc....

**Le choix du propulseur est intimement liée au projet navire et doit être pris en compte dès le début du projet, et interagir au cours de son développement.**

## INTRODUCTION- 6

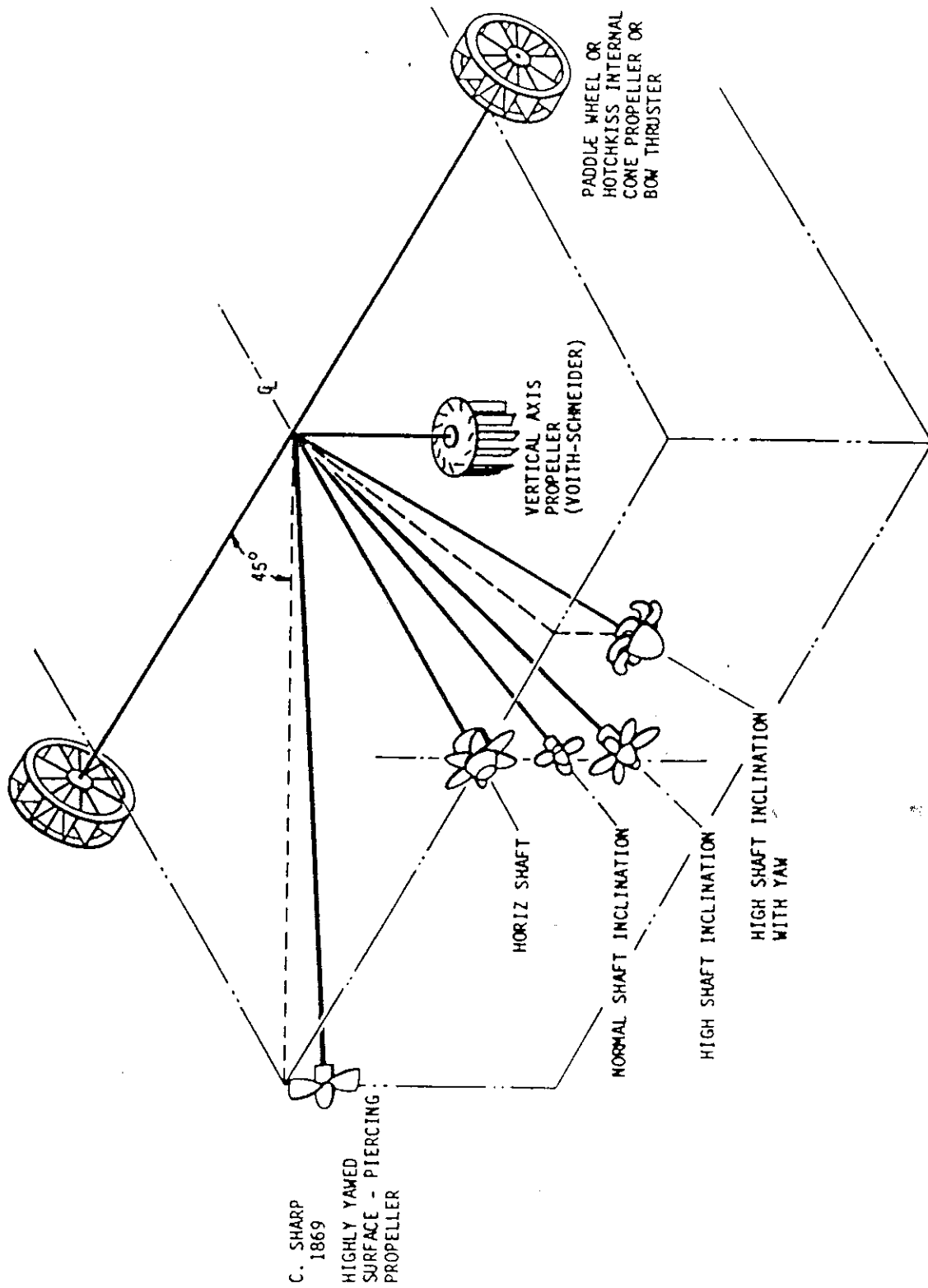
### CHOIX DU PROPULSEUR

Un des premiers choix auquel est confronté l'architecte naval est celui du propulseur. Si l'hélice est souvent le dispositif le plus simple et efficace, il en existe plusieurs variantes adaptées à des applications particulières. Par ailleurs, de nombreux types de propulseurs ont été imaginés, et testés. Certains n'ont pas eu de succès, d'autres répondent efficacement à des problèmes particuliers: navires rapides, manoeuvrabilité, etc. Le tableau ci-dessous présente les différents modes de propulsion utilisés aujourd'hui avec leurs avantages et inconvénients respectifs. On indique enfin pour chaque cas le domaine d'utilisation privilégié.

PROPULSEUR	AVANTAGES	INCONVENIENTS	UTILISATION
Hélice classique (subcavitante)	Simplicité Rendement	Haute vitesse	Généralisée
Hélices contrarotatives	Rendement le plus élevé	Complexité mécanique	En hausse mais technologie...
Hélice à pas variable	Inversion de poussée Adaptation à la machine	Complexité mécanique Couple limité (gros moyeu)	Généralisée en Naval-Ferry...
Hélice sur nacelle ou "Z drive"	Moyenne/haute vitesse Rendement & Cavitation	Complexité mécanique Puissance limitée	En hausse avec les moteurs électriques
Hélice carénée	Rendement élevé pour Ct élevé à basse vitesse	Complexité Rendement à vitesse élevée	Remorqueurs Pousseurs
Pompe - hélice	Cavitation Discrétion acoustique	Complexité Rendement (voir sillage)	Torpille S-M
Hydrojets	Vitesse élevée Vectorisation de la poussée Pas de traînée d'appendice	Poids et encombrement Coût	En hausse Ferries rapides Patrouilleurs
Hélices tandem	Haute vitesse	Rendement (?)	Inutilisées
Hélice supercavitante	Haute vitesse	Rendement basse vitesse	Peu utilisée
Hélice semi- immergée	Haute vitesse Rendement (Offshore)	Rendement basse vitesse Position de la surface libre	Compétition NES
Hélice à axe vertical	Vectorisation de la poussée Chargement plus faible	Intégration sur le navire Coût	Remorqueurs Chasseur de mine
Roue à aube	Faible profondeur Vitesse de rotation (vapeur)	Rendement Position de la surface libre	Touristes (EuroDisney)
Hélices aériennes	Très faible profondeur	Rendement Encombrement	Navire à coussin d'air
Eolienne (voiles)	Energie gratuite Propulsion d'appoint	Fiabilité Manoeuvre	Yacht Fuel cher...

INTRODUCTION-7

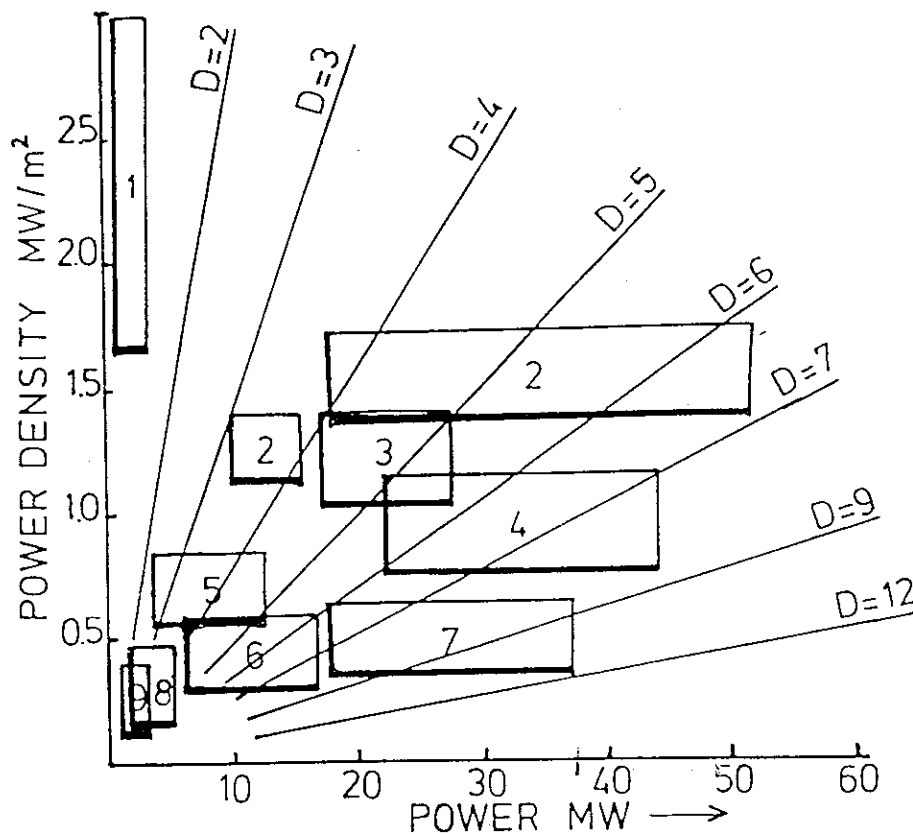
TYPES DE PROPULSEURS



## INTRODUCTION-8

### PUISSANCE ABSORBÉE PAR LE PROPULSEUR

Dans les premières itérations d'un projet il est intéressant de connaître approximativement la densité de puissance (puissance à l'arbre rapportée à la surface du disque en  $\text{MW/m}^2$ ) dont le propulseur est capable en fonction du type de navire, de la puissance installée, et de la vitesse. Cette présentation dimensionnelle d'une base de donnée conséquente permet de se rendre compte de manière concrète des possibilités d'absorption de puissance en fonction du type de navire, et de la vitesse.



#### Shiptypes

1. high speed patrol vessels
2. naval vessels
3. large ferries
4. passenger and container vessels
5. channel ferries, Ro-Ro/passenger vessels
6. cargo ships
7. tankers
8. tugs
9. finishing vessels

## INTRODUCTION- 9

### RENDEMENT DES PROPULSEURS

Le rendement des propulseurs ne peut être considéré de manière absolue car le rendement propulsif global, qui est celui qui compte pour l'architecte naval, dépend autant des performances du propulseur isolé, que de la manière dont il est intégré dans le navire. C'est pourquoi il faut toujours analyser complètement toute comparaison de rendement propulsif. Dans ce débat, il faut aussi ajouter aux considérations techniques, les pressions commerciales qui influencent fréquemment les données disponibles lorsqu'elles se rapprochent d'installations réelles.

On définit ici le rendement propulsif de manière classique:  $\eta = \frac{R \cdot V}{P}$

Où R: Résistance du navire  
V: Vitesse du navire  
P: Puissance à l'arbre

En ce qui concerne le rendement du propulseur isolé, et comme nous le verrons par la suite, un des facteurs qui influence directement le rendement de tout propulseur est le chargement (la poussée par unité de surface du disque). Si les chargements de 2 propulseurs sont différents il devient difficile de les comparer objectivement.

De même, des points de fonctionnement (vitesse d'avance, vitesse de rotation) différents peuvent entraîner des différences de rendement même à chargement constant. Il faut donc tenir compte du fait qu'un propulseur a pu être conçu pour un point de fonctionnement différent et éventuellement défavorable (nombre de tour inadapté, ou vitesse plus élevée par exemple).

Les interactions entre le propulseur et le navire modifient la manière dont la poussée est générée, et la manière dont la traînée du navire peut être modifiée. Ces interactions sont généralement importantes, et peuvent être plus ou moins bien exploitées par l'architecte.

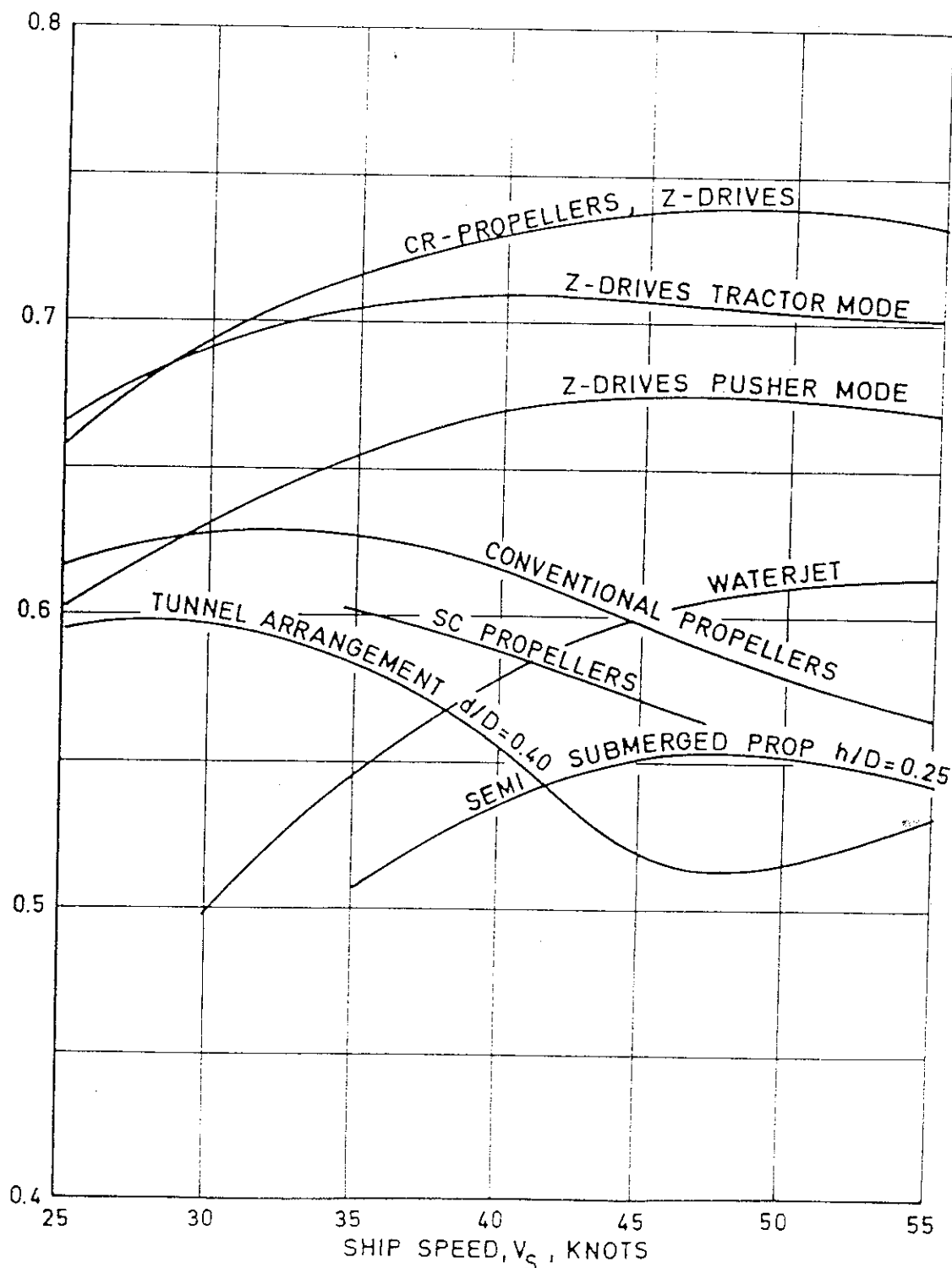
Compte tenu du nombre important de facteurs qui peuvent influencer la comparaison de 2 propulseurs pour un même cahier des charges, il est généralement nécessaire de mener de front la conception de 2 navires différents, chacun optimisé en vue de l'utilisation d'un propulseur particulier.

Pour donner un ordre de grandeur des rendements réalisables en propulsion navale, les rendements de plusieurs propulseurs sont comparés en fonction de la vitesse. Pour des hélices ces rendements sont généralement supérieurs à 50% et peuvent atteindre 70 à 75%. Seuls les corps sous-marins atteignent des rendements supérieurs (85 à 95%) à cause d'interactions particulièrement favorables. Il est généralement admis que les hélices classiques ont un rendement supérieur pour des vitesses inférieures à 30 à 40 noeuds. Le récent essor de la propulsion par hydrojet a montré qu'à partir de 30 noeuds l'hydrojet pouvait être légèrement supérieur à une propulsion par hélice. Au dessus de 40 noeuds les hélices classiques doivent être remplacées par des propulseurs adaptés: hydrojet, hélice semi-immersée ou super cavitante.

# INTRODUCTION- 10

## RENDEMENT DES PROPULSEURS (suite)

$$\eta = \eta_O \eta_R \eta_H \eta_A$$

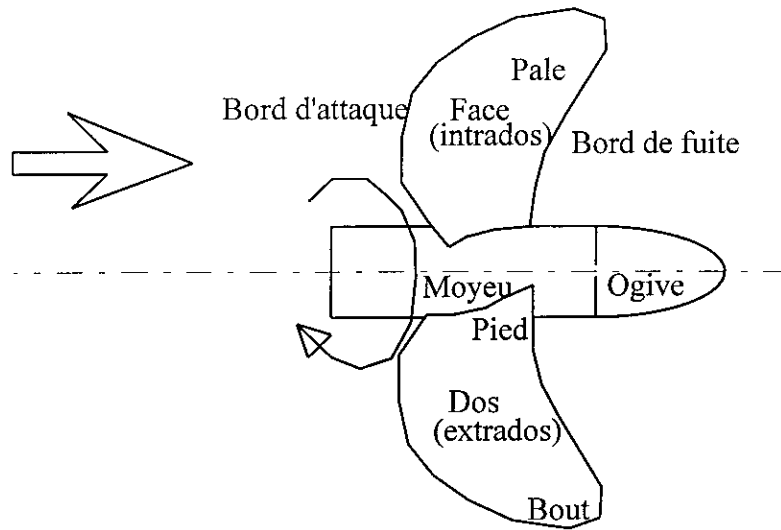


Estimation des rendements propulsifs de différents propulseurs pour un navire rapide de 20 m

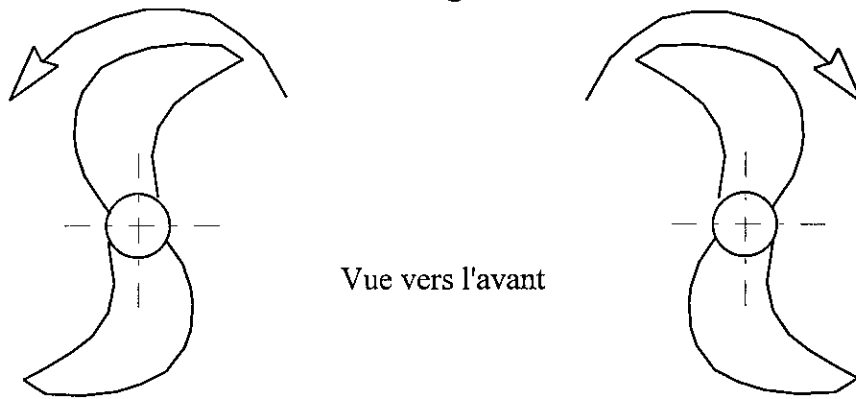
## **2. GEOMETRIE**

# GEOMETRIE - 1

## TERMINOLOGIE GLOBALE



### Navire à 1 ligne d'arbre

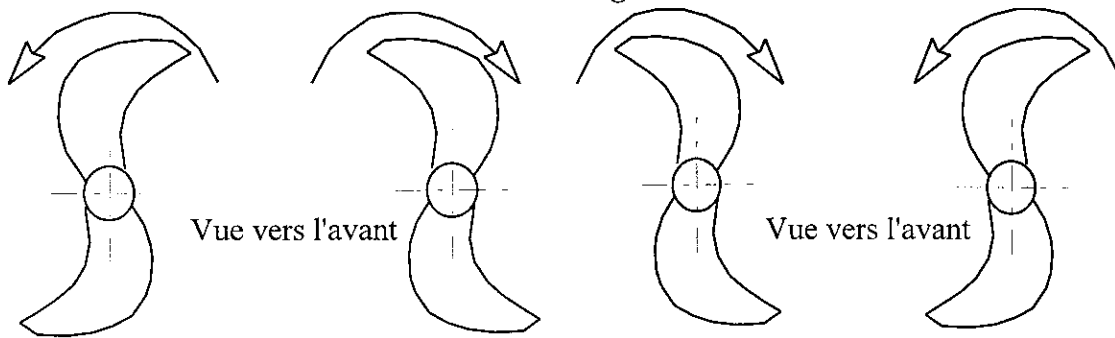


Vue vers l'avant

**Pas à gauche**

**Pas à droite**

### Navire à 2 lignes d'arbre



Vue vers l'avant

Vue vers l'avant

**Hélices supradivergentes**

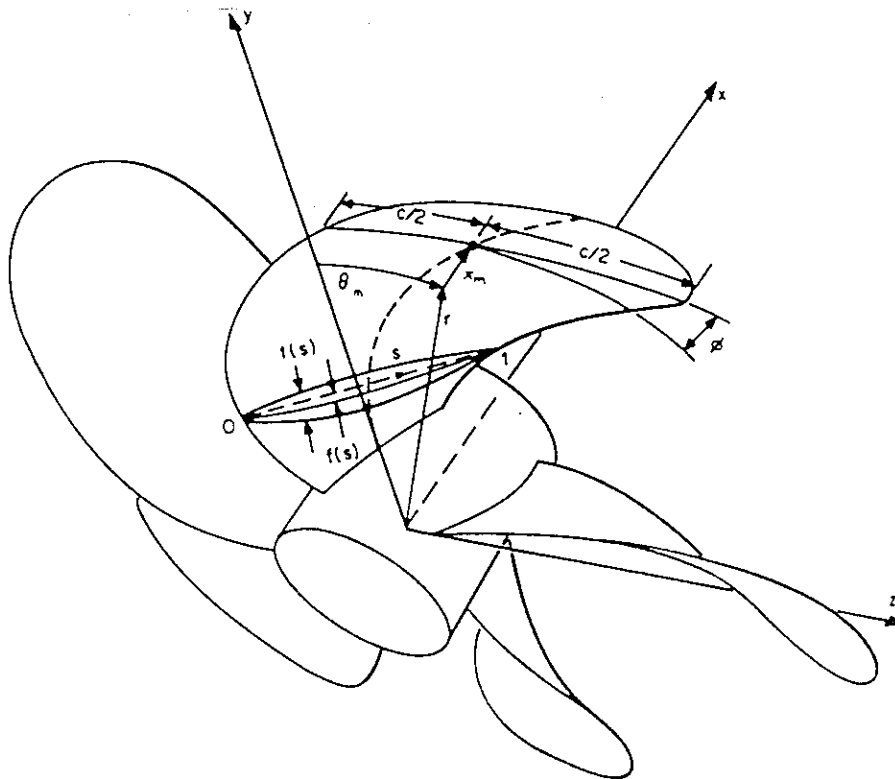
**Hélices supraconvergentes**

## GEOMETRIE - 2

### CONSTRUCTION DE LA PALE

Pour définir une hélice comportant "Z" pales, on lui attribue un référentiel cartésien (O,x,y,z) dont le centre est au milieu du moyeu, dont l'axe "x" est parallèle à l'axe de l'hélice, les deux autres définissant le plan de l'hélice. L'axe "y" est lié à une pale privilégiée dont la géométrie est reproduite périodiquement pour générer l'hélice. On considère l'intersection de l'hélice avec un cylindre de révolution de rayon "r", centré sur l'axe de l'hélice. Ce cylindre une fois développé comporte Z sections de pale distantes les unes des autres de  $2\pi/Z$ . Les sections sont supportées par un axe appelé "ligne de corde" qui passe par le bord d'attaque et le bord de fuite. Les paramètres qui caractérisent les sections de pale dans le plan du cylindre développé sont illustrés sur la figure ci-jointe et décrits ci-dessous:

- la distance entre bord de fuite et bord d'attaque: longueur de la corde "c"
- les distances entre la corde et le milieu de la section: distribution de cambrure "f"
- la distribution d'épaisseur de la section: épaisseur "t"
- l'angle " $\phi$ " entre la ligne de corde et le plan de l'hélice,
- décalage axial "i" du centre du profil (point à mi-corde) par rapport au plan de l'hélice: l'inclinaison ou le "rake"
- décalage angulaire " $\theta$ " du centre (point à mi-corde) par rapport à l'axe lié à la pale ("Oy"): le dévers ou le "skew"



Description géométrique d'une hélice

## GEOMETRIE - 3

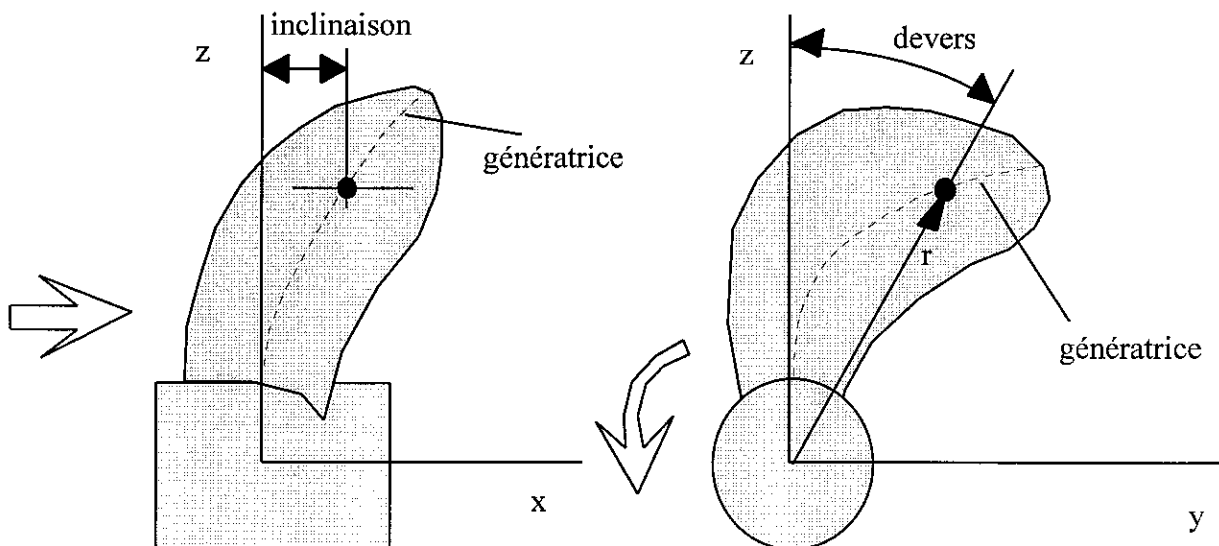
### DISTRIBUTIONS RADIALES

La géométrie de l'hélice est définie par les **distributions radiales** des paramètres principaux des sections, et chaque section est définie elle même par des **distributions en corde** de cotes définissant la distance des surfaces dos et faces à la ligne de corde.

Les paramètres principaux des sections qui sont typiquement tabulés pour différentes valeur du rayon sont les suivants:

- Pas  $P/D = (2 \pi r \tan \phi)/D$
- Corde  $c/D$
- Epaisseur max.  $t_x/D = \max. (t/c).c/D$
- Cambrure max.  $f_x/D = \max. (f/c).c/D$
- Dévers "Skew"  $\theta$
- Inclinaison "Rake"  $i/D$

Les distributions de dévers et d'inclinaison permettent de tracer la génératrice. La distribution de pas permet de caler la ligne de corde à la surface de chaque rayon, de manière à ce qu'elle soit parallèle à l'hélicoïde correspondante. On obtient ainsi un "squelette" sur lequel on "colle" les sections qui sont définies par rapport à l'axe de la corde. Le fait de conserver les épaisseurs maximales et les cambrures maximales dans les distributions radiales permet dans certains cas d'appliquer des homothéties à des profils standardisés de type NACA par exemple.



## GEOMETRIE - 4

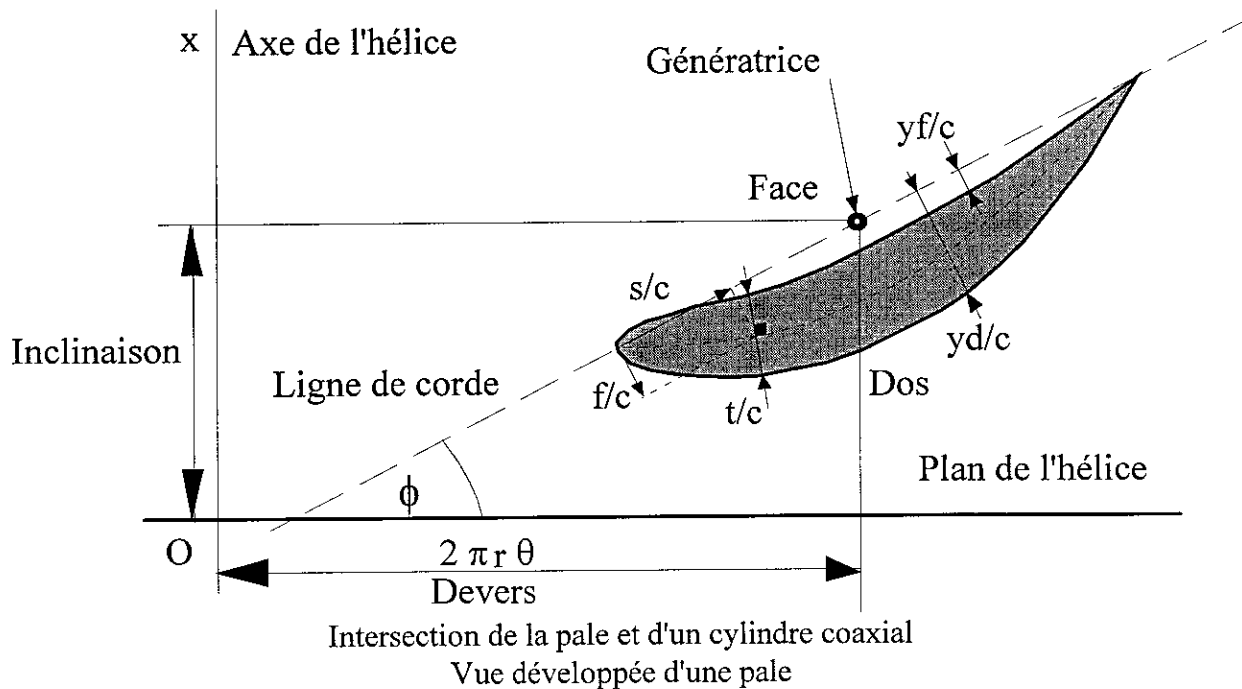
### DISTRIBUTIONS EN CORDE

Pour chaque rayon on définit une section de pale qui s'appuie sur la ligne de corde. La distance le long de la corde en aval du bord d'attaque est dénotée "s". Le profil peut être défini indifféremment par des distributions d'épaisseur et de cambrure ou des distributions de cotes "dos" et "face".

- épaisseur  $t(s)$
- cambrure  $f(s)$
- cote dos  $y_d(s)$
- cote face  $y_f(s)$

L'intérêt des distributions d'épaisseur, et de cambrure est double. D'une part elles sont directement reliées aux distributions de vitesse et de pression à la surface de la section. D'autre part celles-ci peuvent facilement faire l'objet d'homothéties pour générer des profils différents adaptés au besoin de chaque section.

On porte sur le schéma ci-dessous la définition de la section de pale dans le plan d'une surface cylindrique développée. On peut alors faire apparaître l'intersection de la génératrice avec cette surface et les distances aux plans Oyz et Oxz qui sont respectivement l'inclinaison (une distance) et le devers (un angle).



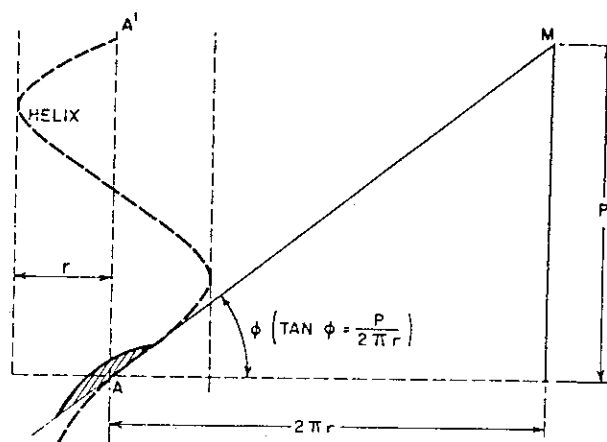
## GEOMETRIE - 5

### PAS

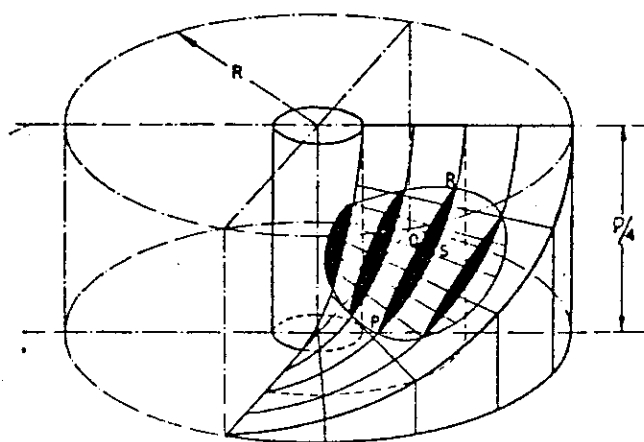
Le pas est défini à partir de l'angle  $\phi$  entre la ligne de corde et le plan de l'hélice (Oyz). Cet angle varie en fonction du rayon et permet essentiellement de caler l'incidence de l'écoulement sur la section. Le pas est calculé pour chaque rayon  $r$  de la manière suivante:

$$P = 2 \pi r \tan \phi$$

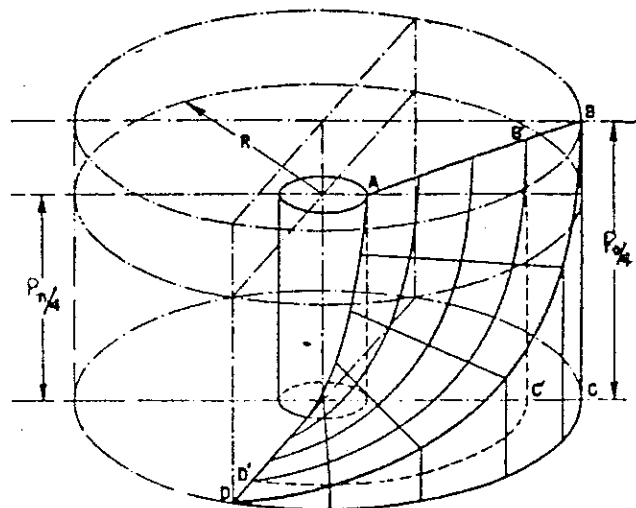
Géométriquement,  $P$  est la distance axiale d'une extrémité à l'autre d'une hélicoïde d'angle  $\phi$  réalisant un tour (schéma ci-dessous). Si la valeur du pas est constante pour toutes les sections, l'hélice est dite à "pas constant". Elle est alors caractérisée par son pas  $P$ , ou le rapport pas/diamètre: " $P/D$ ". Une hélice à pas constant est similaire à une vis dans un solide ou un escalier en colimaçon où, quelque soit le rayon auquel on se place, l'avance par tour est identique. En général, une hélice moderne n'a pas un pas constant. On caractérise son pas par sa valeur à un rayon représentatif, usuellement on prend  $0.7 R$ .



Représentation du pas sur la surface du cylindre développée



Surface hélicoïdale à pas constant



Surface hélicoïdale à pas variable

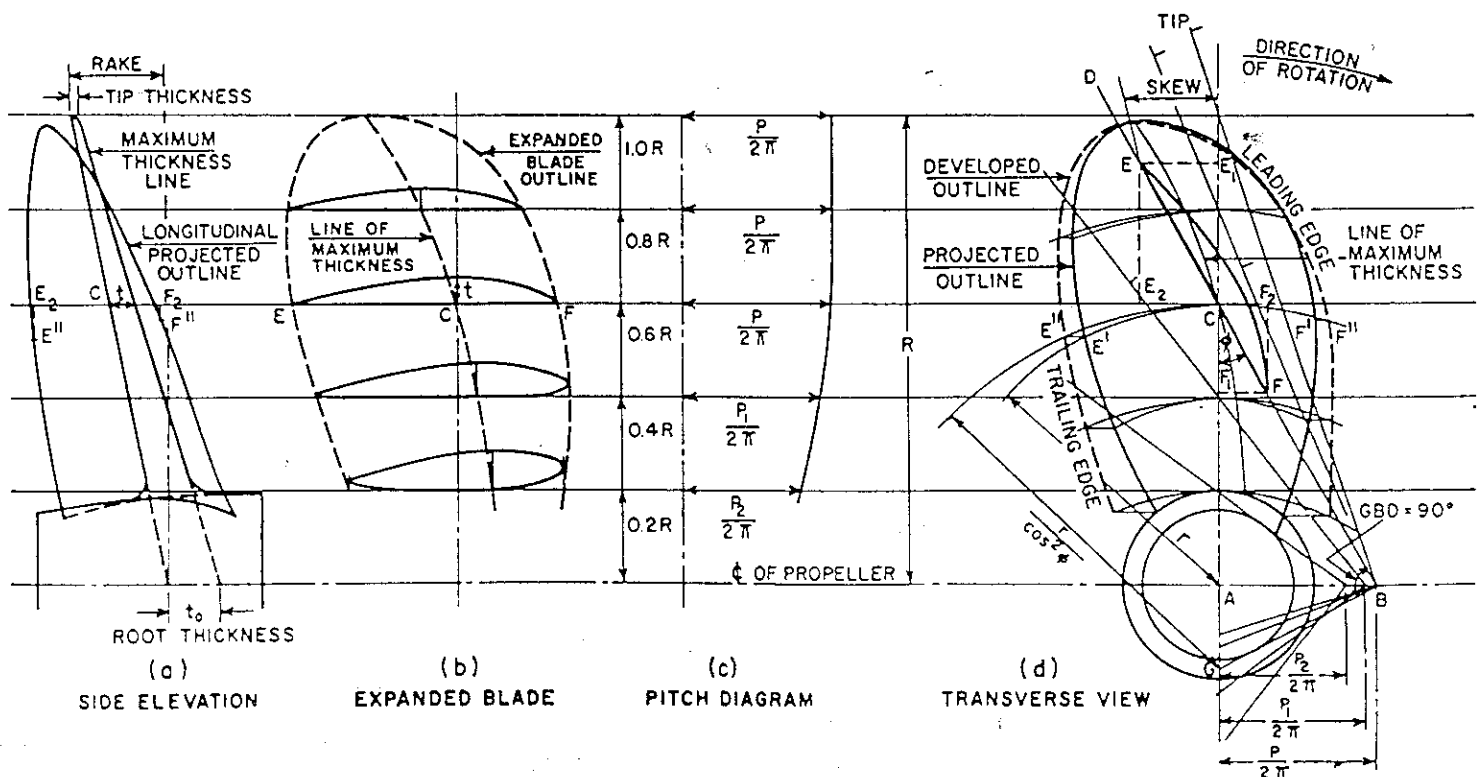
# GEOMETRIE - 6

## PLANS

Les plans d'hélice permettent de transmettre au fondeur la géométrie de l'hélice pour fabrication. Ces plans comportent les projections d'une pale, une vue de la pale développée, des tableaux comportant les distributions radiales (pas, corde, épaisseur maximale), et les cotes dos et face de plusieurs sections. Compte tenu de l'évolution de la CAO, il est possible de communiquer la géométrie de l'hélice sous forme de fichier.

Les caractéristiques d'une hélice se résument généralement au tableau suivant :

Diamètre	D
Nombre de pales	Z
Direction de rotation	Pas à gauche (à droite)
Diamètre relatif de moyeu	$r_m/R$
Epaisseur en pied de pale	$t_0$
Fraction de surface	$A_e/A_o$
Fraction de surface projetée	$A_p/A_o$
Pas à $r=0.7R$	$P(0.7R)/2/0.7R$
Dévers maximum	$\theta$
Inertie de rotation ( $I_{xx}$ )	
Poids	
Société de classification	BV, Lloyds, DNV....



### **3. ELEMENTS DE CONCEPTION**

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 1

### DIAMETRE ET NOMBRE DE TOURS

Le diamètre et le nombre de tours sont les paramètres principaux du propulseur et le choix du couple  $(n,D)$  influence toutes les autres caractéristiques de l'hélice: pas, fraction de surface, sections, etc... La vitesse du navire étant généralement connue, le choix de  $D$  et de  $n$ , et conséquemment de  $J$  et de  $K_t$  est un point crucial dans le dessin du propulseur. Ces paramètres sont intimement liés et il ne peuvent être choisis indépendamment. Idéalement, le concepteur optimise le couple  $(n,D)$  vis à vis des performances propulsives et acoustiques, par exemple en réalisant plusieurs dessins pour des diamètres différents. Suivant la nature du projet ce choix est réalisé sur la base soit d'abaques (projets peu importants), soit de projets précédents ou d'une base de donnée, soit de l'évaluation numérique et parfois expérimentale d'un nombre élevé de projets: une vingtaine ou plus en numérique, jusque 4 et 5 en expérimental.

Néanmoins, dans la pratique, il s'avère que des contraintes fortes existent sur  $D$  et  $n$ . Elles proviennent généralement de l'architecture des formes arrière pour le diamètre et de la machine pour le nombre de tours. Les contraintes qui limitent le diamètre sont les suivantes:

- o l'immersion de l'extrémité supérieure du disque,
- o le dépassement de l'extrémité inférieure du disque sous la ligne de tain,
- o le dépassement de l'extrémité latérale du disque de la largeur du navire
- o la garde entre le disque et la voute arrière du navire,
- o la distance latérale entre les hélices si il y a plusieurs lignes d'arbre

Les contraintes sur la vitesse de rotation proviennent essentiellement de la courbe de fonctionnement optimale du moteur, du choix du réducteur (notamment si il a été choisit avant le dessin d'hélice), et éventuellement de limites mécaniques liées au couple sur le moyeu pour une hélice à pas variable, ou liées à la dureté des dents du réducteur.

### NOMBRE DE PALES

Le nombre de pales est déterminé généralement par des considérations de vibrations et de bruit. Il s'agit dans un premier temps de réduire l'excitation à la fréquence de passage des pales (blade rate ou "BR") ou aux harmoniques supérieurs de la BR. Dans un second temps, il faut vérifier que ces fréquences ne correspondent pas à des modes propres de la structure du navire, de la ligne d'arbre, ou du moteur (nombre de cylindres d'un moteur diesel par exemple).

L'excitation de la structure à la BR et à ses harmoniques s'effectue par le champ de pression instationnaire autour de l'hélice et par l'arbre. L'intensité de cette excitation dépend du champ de vitesse amont: le sillage. Néanmoins, à nombre de pales donné, la géométrie de l'hélice elle-même, en particulier son dévers, permet aussi d'influencer l'intensité de l'excitation. Il faut donc prendre en compte le sillage (chapitre sur le sillage), et étudier différentes loi de devers pour différents nombre de pales pour pouvoir guider le choix du nombre de pales. Cette démarche est maintenant réalisée à l'aide de codes hélice instationnaires.

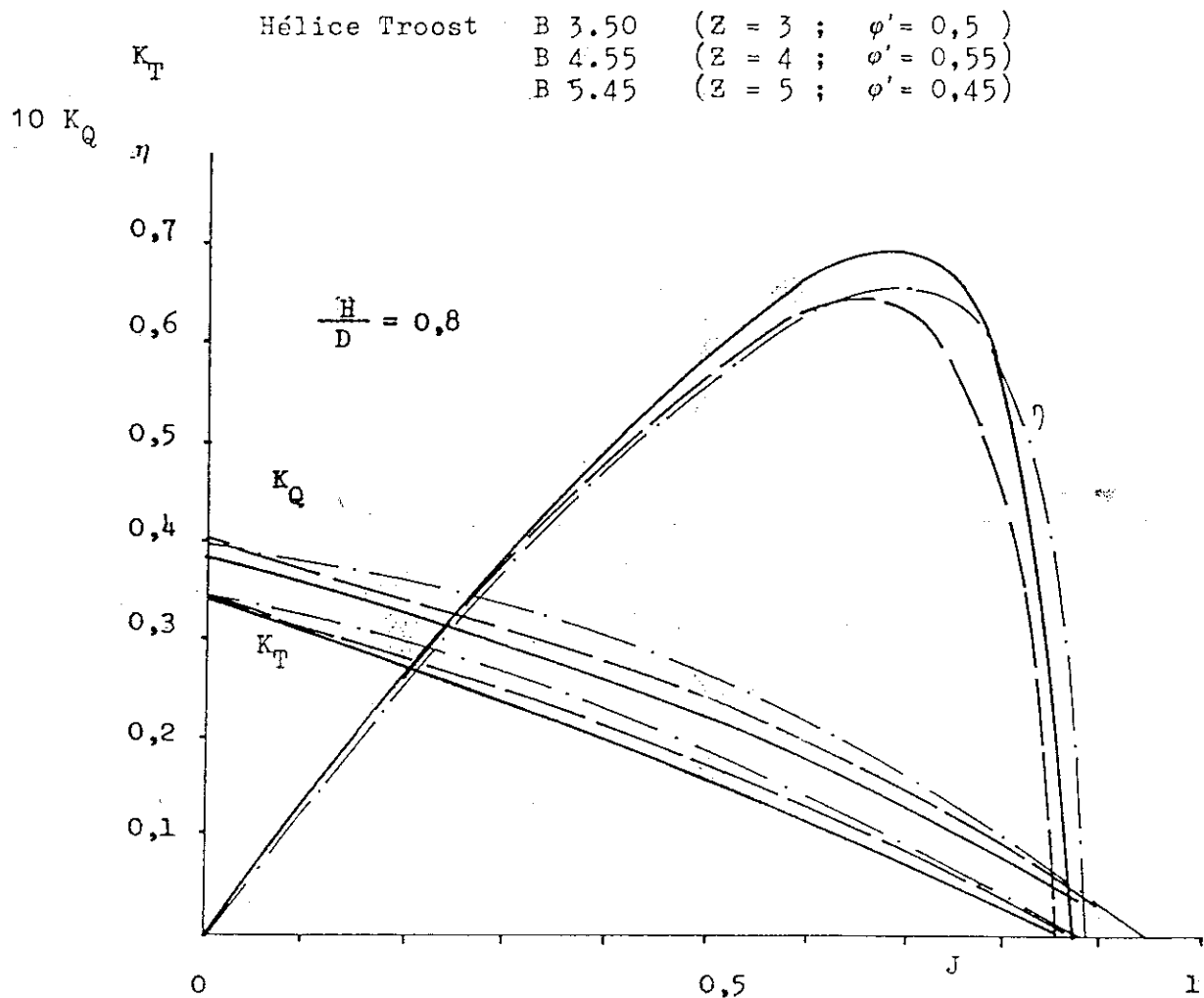
## ELEMENTS DE CONCEPTION - 2

### NOMBRE DE PALES (suite)

En plus des considérations de bruit vibration, on peut citer certaines conséquences évidente sur le plan pratique à FS et géométrie de section donnés:

- l'augmentation du nombre de pales permet de réduire le poids de l'hélice.
- la diminution du nombre de pales permet d'améliorer la qualité de la réalisation pour une technologie de fabrication donnée.

Enfin, il faut noter que le nombre de pales a une incidence faible sur le rendement à pas et fraction de surface donnés, pour une même famille d'hélice. On montre ici les résultats pour les hélices Troost ou série B.

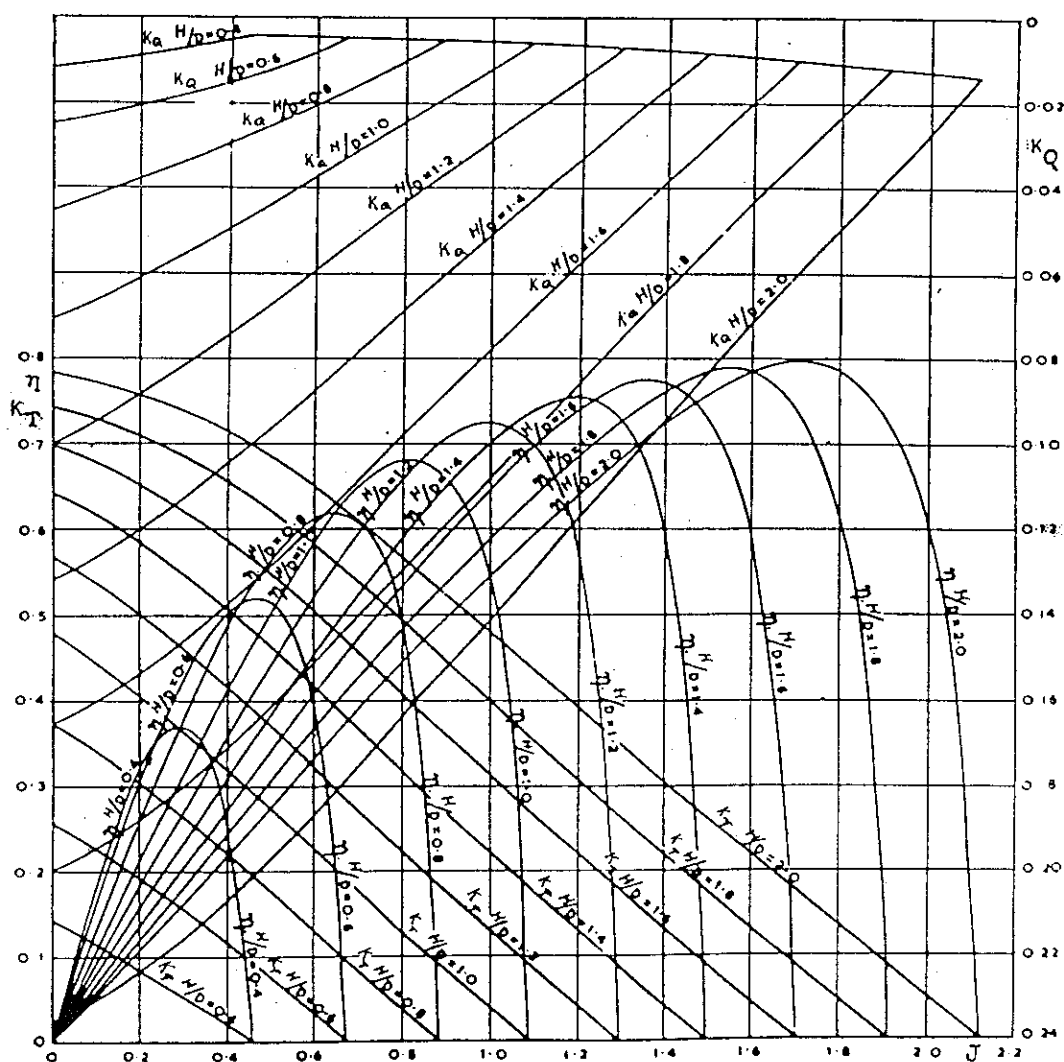


Diagrammes  $J$ ,  $K_t$ ,  $K_q$ ,  $\eta$ : Influence du nombre de pale ( $Z$  varie de 3 à 5) sur les performances des hélices TROOST (fraction de surface  $\phi = 0,5$ , pas  $P/D = 0,8$ )

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 3

### PAS

Une fois les caractéristiques principales ( $J$  et  $K_t$ ) figées à partir du cahier des charges du propulseur et des différentes contraintes, le paramètre hydrodynamique principal à sélectionner est le pas. En effet, c'est principalement le pas (la fraction de surface et les sections sont aussi importantes) qui permet de faire en sorte que la poussée désirée est atteinte au nombre de tour et vitesse prévues. L'influence du pas sur les performances d'une hélice à fraction de surface constante et section de pale donnée, est illustrée par les données des hélices GAWN ci dessous. On constate que plus le pas est élevé, plus le  $J$  au rendement maximal ainsi que le rendement maximal augmentent. Ceci s'explique par le fait qu'à diamètre et surface donné, une hélice avec plus de pas tourne moins vite ( $J$  plus faible) ce qui a pour conséquence de réduire les pertes dues au frottement. Le fait de tourner moins vite a aussi des implications sur la cavitation et le bruit.



Diagrammes  $J$ ,  $K_t$ ,  $K_q$ ,  $\eta$ : Influence du pas ( $P/D$  varie de 0.4 à 2.0) sur les performances des hélices GAWN (fraction de surface  $\phi = 0.65$ )

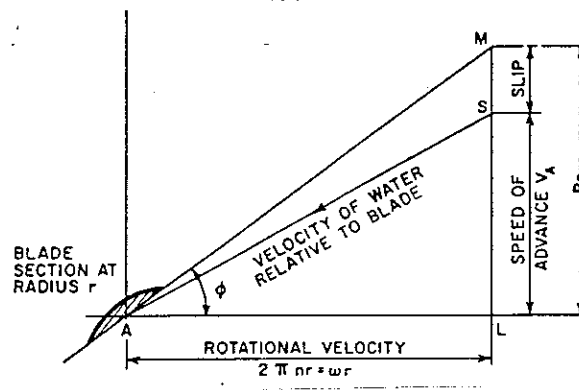
## ELEMENTS DE CONCEPTION - 4

### RECU

Les hélices travaillant dans un fluide, et il existe une différence entre la vitesse d'avance de l'hélice dans le fluide et la vitesse de progression correspondant géométriquement au pas qui est donnée par  $P.n$  où  $n$  est le nombre de tour par seconde. Cette différence est appelée le recul. On distingue deux valeurs du recul suivant que l'on considère la vitesse d'avance du navire ( $V_o$ ), on parle alors de "recul apparent" ou bien on considère la vitesse d'avance de l'hélice ( $V_a$ ), on parle alors de "recul réel". La différence provient de la modification de la vitesse par le présence du navire qui est quantifiée par le coefficient de sillage:  $1-w = V_a/V_o$ . On peut alors écrire:

$$\text{recul apparent : } r_a = 1.0 - \frac{V_o}{P.n} \qquad \text{recul réel : } r = 1.0 - \frac{V_a}{P.n}$$

Dans la pratique, le recul n'est plus utilisé pour la conception. Cette notion est néanmoins utile pour caractériser le fonctionnement d'une hélice.



Représentation du recul

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 5

### SURFACE

La surface d'une hélice est un paramètre particulièrement important aussi bien pour son rendement, que pour ses performances en cavitation. On dispose de 3 définitions différentes dont deux ont une signification géométrique exacte: ce sont les surfaces projetées "Ap" et développées "Ad". Compte tenu de la difficulté d'obtenir sans CAO une valeur exacte de la surface développée, on fait appel à une approximation qui est appelée "expanded" surface "Ae" chez les anglo-saxons et qui est simplement l'intégrale de la distribution radiale de corde:

$$A_e = Z \int_{r_h}^R c(r) dr$$

Le paramètre adimensionné caractérisant la surface de l'hélice est construit naturellement à partir de la surface développée et de l'aire du disque (Ao) et est appelé "fraction de surface" ou "FS". On a alors:

$$\text{"FS"} = \frac{A_e}{A_o} = \frac{A_e}{\pi R^2}$$

Pour FS proche de 1 on ne voit plus à travers le disque. On peut aussi estimer la surface projetée en faisant appel à des hypothèses de pas constant et de distribution radiale de corde de forme elliptique:

$$\frac{A_p}{A_e} \approx \frac{A_p}{A_d} = 1.067 - 0.229 \cdot P/D \quad \text{soit environ } 0.7 \text{ à } 0.8 \text{ pour des valeurs de pas usuelles.}$$

En ce qui concerne le choix de la fraction de surface, c'est un des objectifs principaux du concepteur que de réduire au minimum la surface mouillée de l'hélice pour gagner en rendement (pertes visqueuses). Cette influence est illustrée par les essais systématiques des hélices GAWN. Une seconde bonne raison de réduire la fraction de surface, c'est qu'elle influence directement la masse de métal utilisée, la taille des paliers, le diamètre de la ligne d'arbre, et donc le déplacement du navire mais aussi son coût.

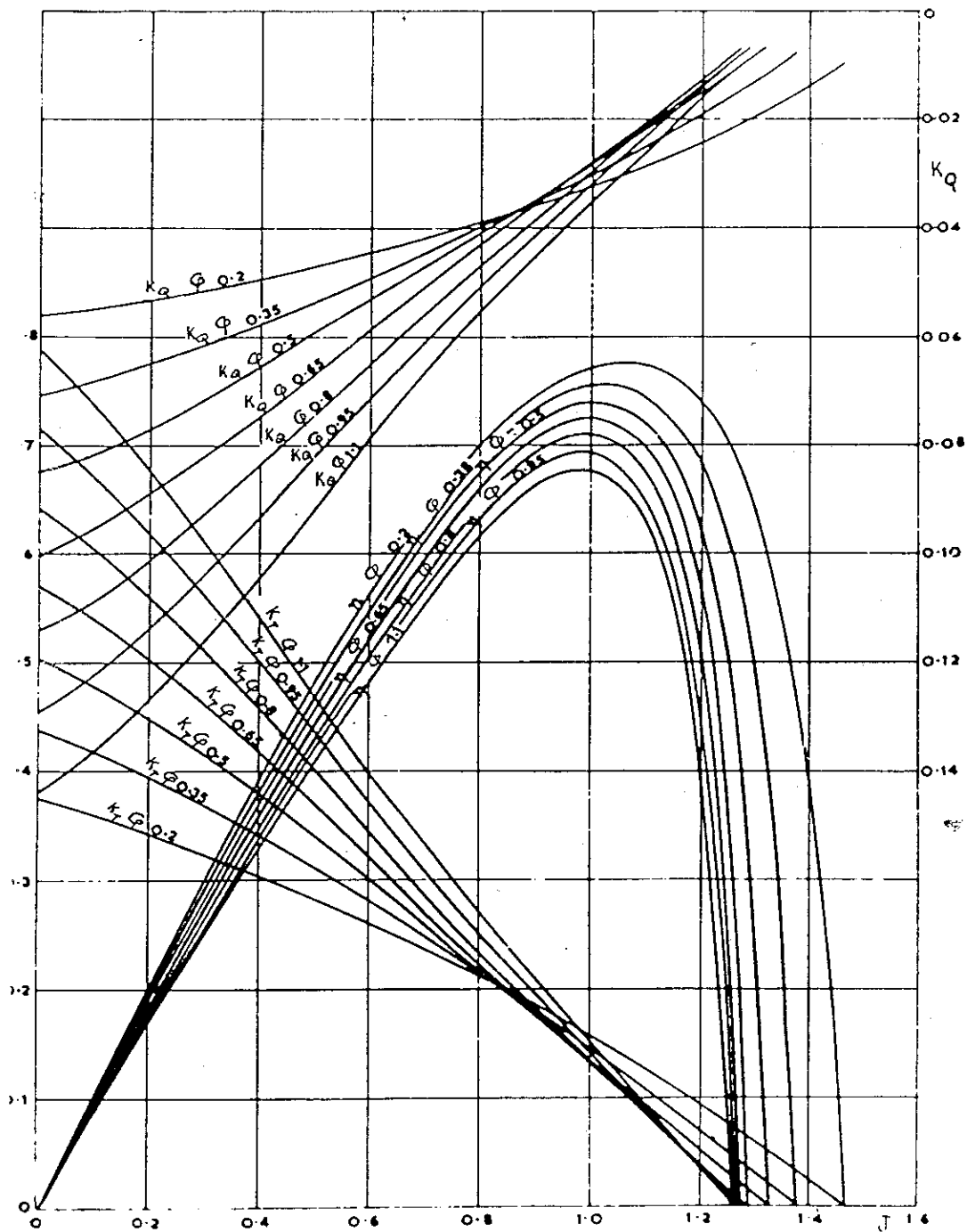
Ce qui limite la fraction de surface, c'est le chargement de l'hélice ( $\tau_c$ ) et donc celui des sections. Hors contraintes de cavitation, le coefficient de portance des sections ne peut guère excéder 1.0 sans provoquer de décollements (chapitre section 2D). En règle générale, les pressions requises pour générer de tels coefficients de portance provoquent de la cavitation qui limite le coefficient de portance réalisable. On choisit donc la surface en fonction de la cavitation. Si des approches numériques sophistiquées existent, on peut aussi utiliser des abaques basées sur l'expérience ou sur des essais de séries systématiques: Burrill, Kamewa, Troost

Les paramètres sont :

$\tau_c$	coefficient de chargement	$\tau_c = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A_p V_r^2}$
avec:	T: poussée (N)	$A_p$ : surface projetée (m <sup>2</sup> )
	$V_r$ : Vitesse relative (m/s)	$V_r^2 = V_a^2 + (0.7 \cdot \pi \cdot n \cdot D)^2$
$\sigma$	Paramètre cavitation	$\sigma = \frac{P_o - P_v + \rho gh}{\frac{1}{2} \rho V_r^2}$
avec	h: immersion de l'axe de l'hélice	$P_v$ : pression de vapeur

# ELEMENTS DE CONCEPTION - 6

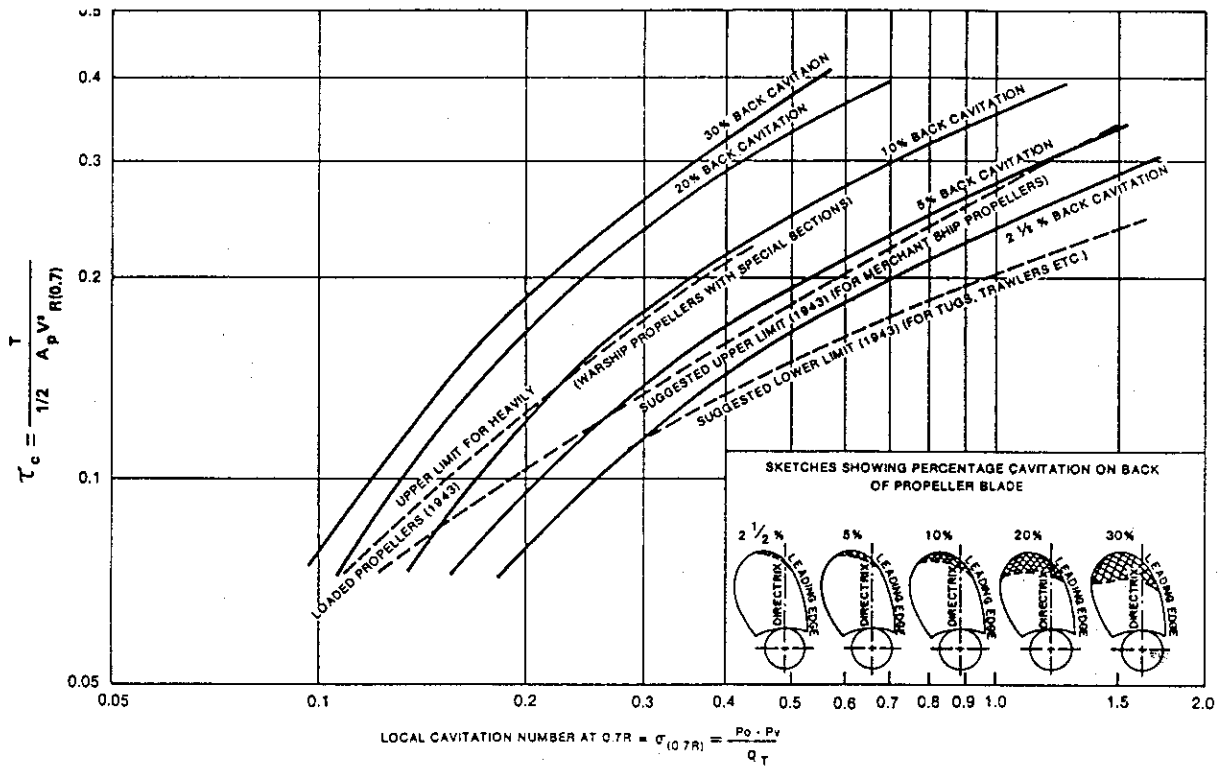
## SURFACE (suite)



Diagrammes J,  $K_t$ ,  $K_q$ ,  $\eta$ : Influence de la fraction de surface (ici  $\phi$  varie de 0.2 à 1.1) sur les performances des hélices GAWN ( $P/D=1.2$ )

ELEMENTS DE CONCEPTION - 7

SURFACE (suite)



Abaques de Burrill pour les limites de chargement d'une hélice vis-à-vis de la cavitation

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 8

### LOI DE CORDE

Comme on l'a vu pour la fraction de surface, et comme on le voit plus loin, la longueur de corde est choisie en fonction de la cavitation qui impose soit une fraction de surface minimale, soit de manière plus fine des longueurs de corde minimales aux différents rayons. Par ailleurs, compte tenu des efforts sur la pale, celle-ci doit se comporter comme une poutre. La distribution de corde joue un rôle crucial dans la distribution des contraintes dans la pale. C'est pourquoi il importe que la distribution de corde soit régulière et lissée pour éviter des concentrations de contraintes. On peut utiliser pour cela un fit du type suivant:

$$\frac{c}{D} = \frac{a}{2}(b+x)(1-x)^m \text{ où}$$

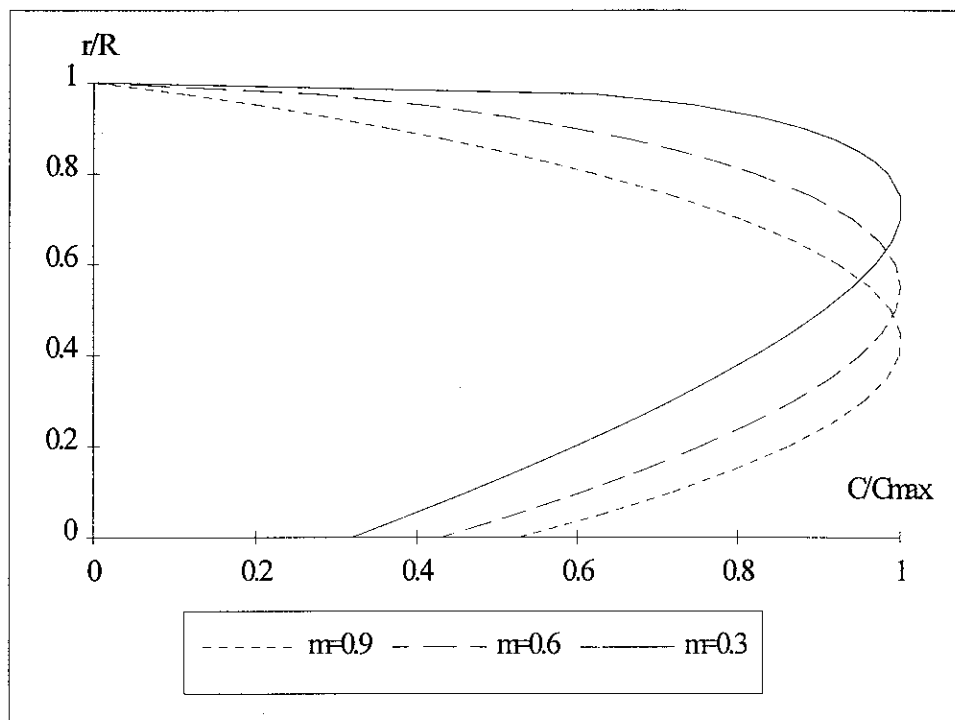
$a = 1.0 \text{ à } 1.5$  : contrôle la surface de la pale

$b = 0.1 \text{ à } 0.2$  : contrôle la corde au moyeu

$m = 0.4 \text{ à } 0.5$  : contrôle la corde en milieu de pale

$x = r/R$

$x_m = r_{\text{moyeu}}/R$



Cette équation est facilement intégrable pour obtenir la surface "développée":

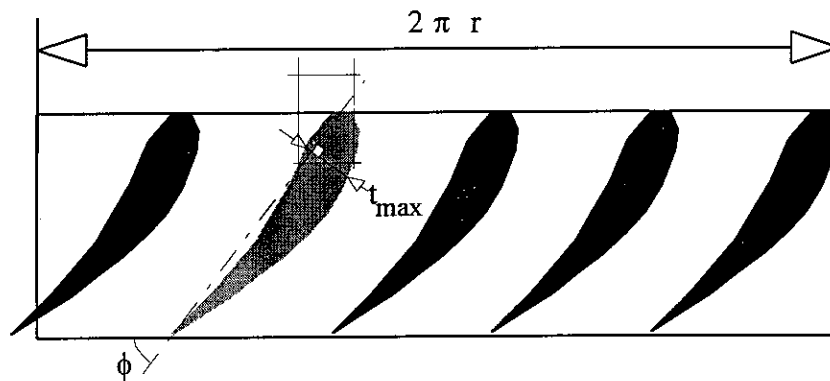
$$"FS" = \frac{A_e}{A_o} = \frac{a}{\pi} (1-x_m)^{1+m} \left[ \frac{1+b}{1+m} - \frac{1-x_m}{2+m} \right]$$

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 9

### MOYEU

Pour obtenir le meilleur rendement possible, on cherche généralement à réduire au minimum le diamètre du moyeu. Ce dernier est rarement inférieur à  $0.15 R$ , et souvent autour de  $0.2 R$ . Il dépend néanmoins des interférences entre les pales au moyeu et de contraintes structurelles qui dépendent du mode de fabrication: monobloc, pales rapportées, hélice à pas variable, etc.

La disposition des pales sur le moyeu est régie par des contraintes structurelles et hydrodynamiques. D'une part le pied de pale est susceptible d'être le lieu de concentration de contraintes qu'il faut étudier avec soin et qui nécessitent généralement un congé de raccordement. D'autre part, il faut éviter un blocage trop important de l'écoulement dans une zone où les pales occupent un volume de plus en plus grand dans l'écoulement. Pour ce dernier point on étudie la compatibilité du nombre de pale, du rayon du moyeu ( $r_m$ ), du pas au moyeu ( $\phi_m$ ) et de l'épaisseur maximale de la pale ( $t_{max}$ ). On calcule donc un facteur de remplissage "S" de la périphérie du moyeu par l'épaisseur des pales:



Surface développée du moyeu d'une 5 pales

$$S = \frac{t_{max}}{\sin \phi_m} \cdot \frac{Z}{2 \pi \cdot r_m}$$

Il faut veiller à ce que S reste inférieur à 0.5 pour éviter les problèmes de blocage hydrodynamiques. Les grands nombre de pales comme il en existe sur les sous-marins peuvent imposer des moyeux de rayon relatif supérieurs à 0.3

Sur des hélices à pas variable, les pales sont solidaires à une "paume" circulaire qui est rapportée au moyeu. Dans ce cas, le problème est principalement lié au désir de réduire le diamètre du moyeu, et aux contraintes dans les pièces mécaniques qui constituent le moyeu.

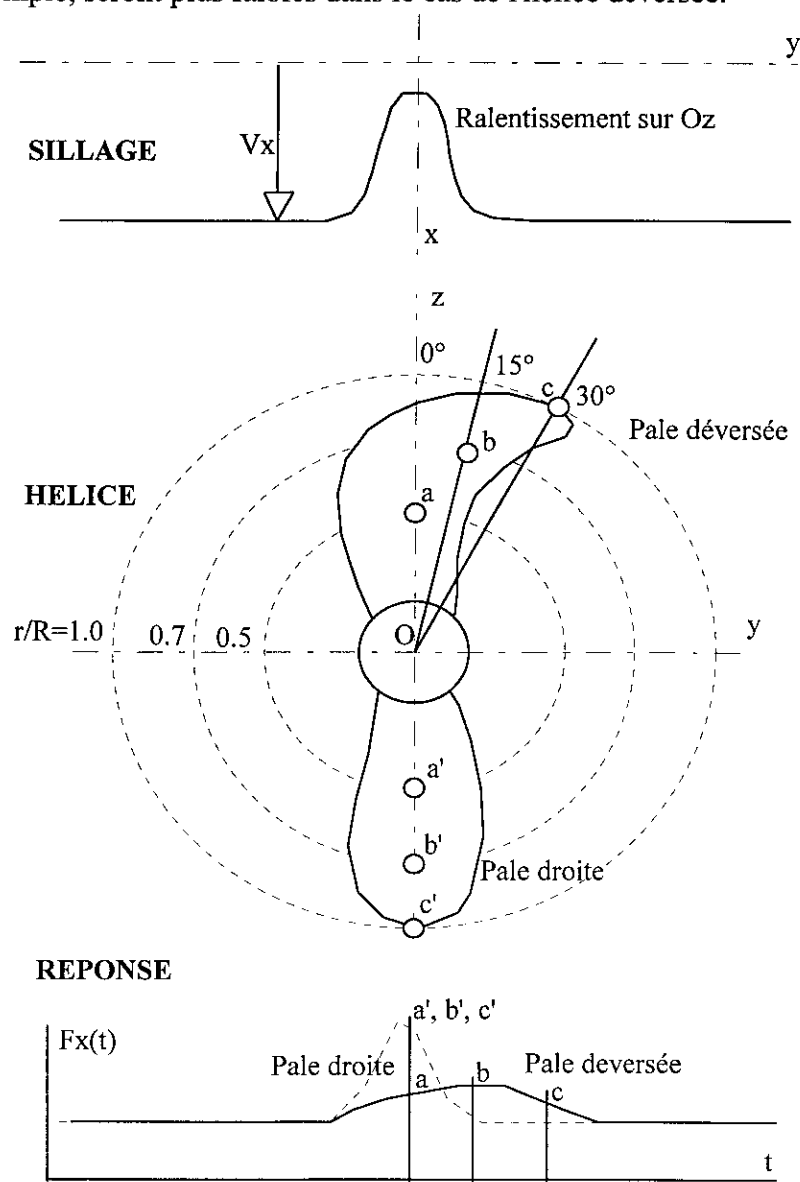
## ELEMENTS DE CONCEPTION - 10

### DEVERS

Le dévers a été introduit depuis une vingtaine d'année dans la conception d'hélice pour réduire les fluctuations du champ de pression liées au passage des pales ainsi que les phénomènes instationnaires liés à la présence du sillage: efforts fluctuants, pressions fluctuantes, dynamique de la cavitation.

En fonctionnement stationnaire (sillage axisymétrique), l'intérêt du dévers réside dans l'uniformisation du champ de pression dans un référentiel fixe.

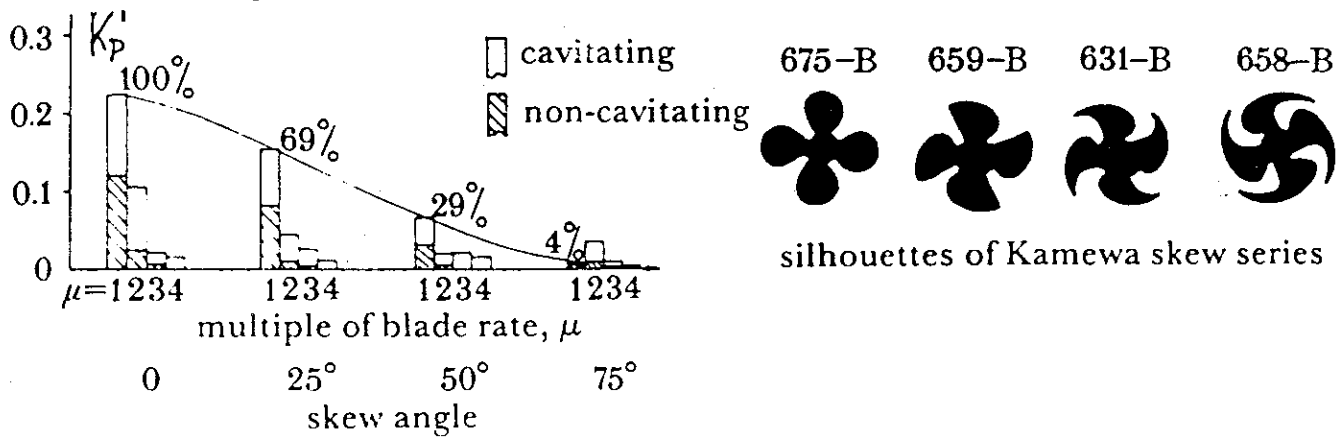
En fonctionnement instationnaire (sillage non-homogène), l'incidence et donc la portance des sections des pales est modifiée par les perturbations du champ de vitesse. L'intérêt du dévers réside dans le déphasage de la réponse à ce type d'excitation entre les différents rayons d'une pale. Ceci est illustré ci-dessous pour un cas très simple, c'est à dire un ralentissement axial vertical en amont de l'hélice (sillage d'un plan mince par exemple). Lorsque la pale passe dans ce sillage, l'hélice "droite" (non déversée) va subir une variation de chargement sur toute son envergure simultanément alors que les sections de l'hélice déversée vont subir la même perturbation mais avec un décalage temporel. Les efforts transmis par l'hélice par exemple, seront plus faibles dans le cas de l'hélice déversée.



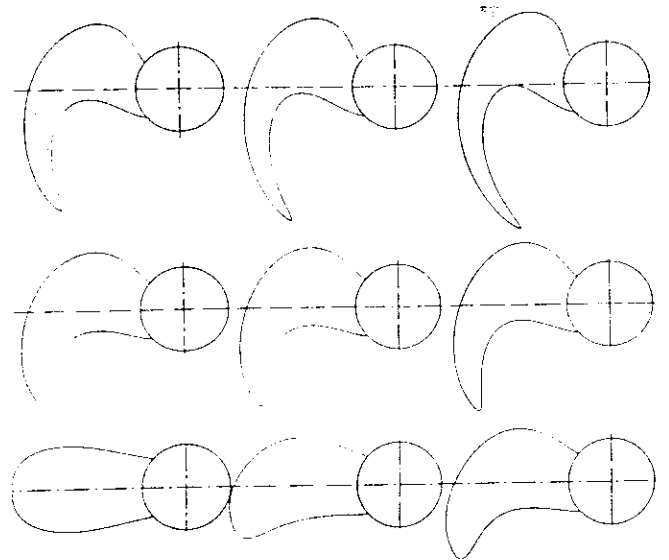
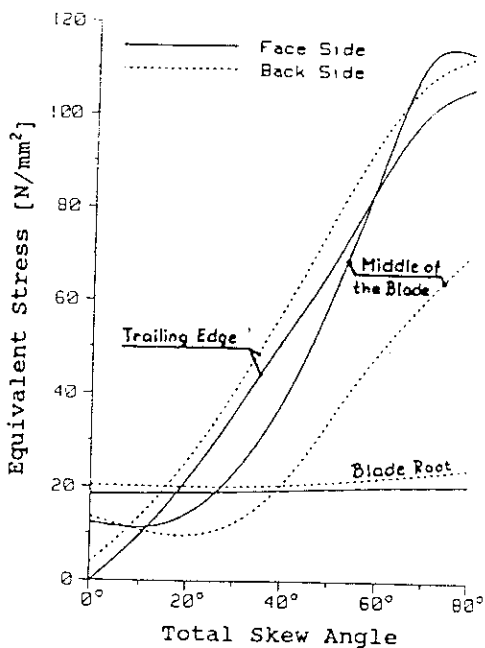
DEVERS (suite)

L'efficacité du dévers pour réduire le champ de pression instationnaire autour d'une hélice, est illustrée par des résultats d'essais avec des pales de dévers variable. Les pressions ont été mesurées sur une paroi proche de l'hélice en fonctionnement cavitant et non-cavitant. Les signaux des pressions ont faits l'objet d'une décomposition harmoniques basée sur des multiples de la fréquence de pale. L'amplitude de la pression pour chaque harmonique est adimensionnée par  $\rho n^2 D^2$ . On constate une diminution remarquable du signal à la BR de 96% entre un dévers nul et un dévers de 75° sur une hélice à quatre pale au même point de fonctionnement. On note aussi une influence de la cavitation qui augmente d'un facteur 2 le niveau des pressions mesurées.

Sur les figures suivantes, on illustre le fait que la présence de devers complique sensiblement le problème du concepteur en matière de tenue mécanique. En effet, la présence de devers génère des contraintes importantes le long du bord de fuite.



Influence du dévers sur les pressions fluctuantes



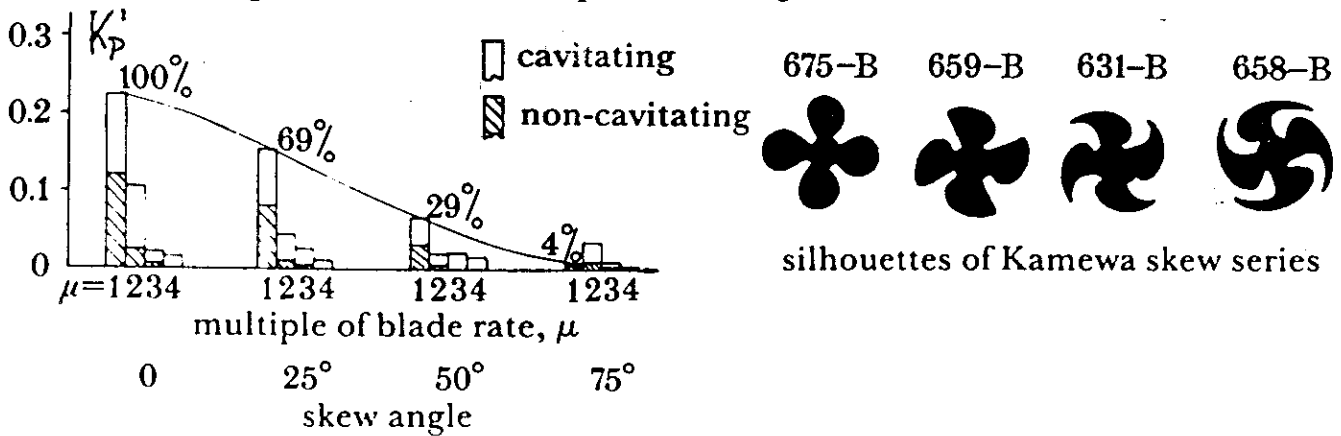
Influence du dévers sur les contraintes dans la pale

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 11

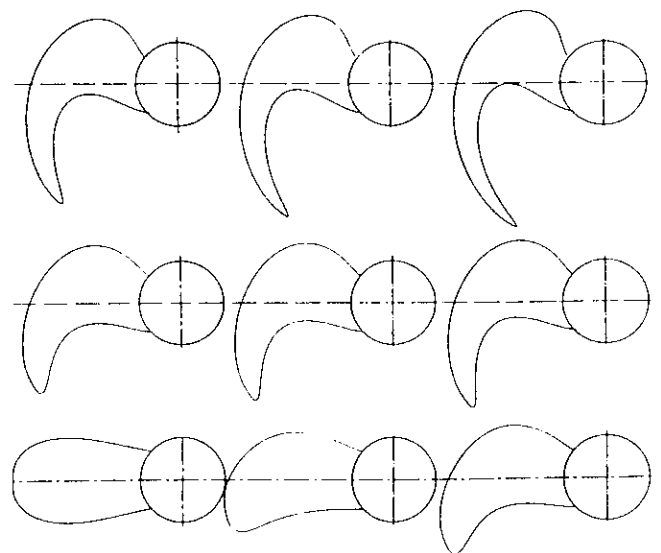
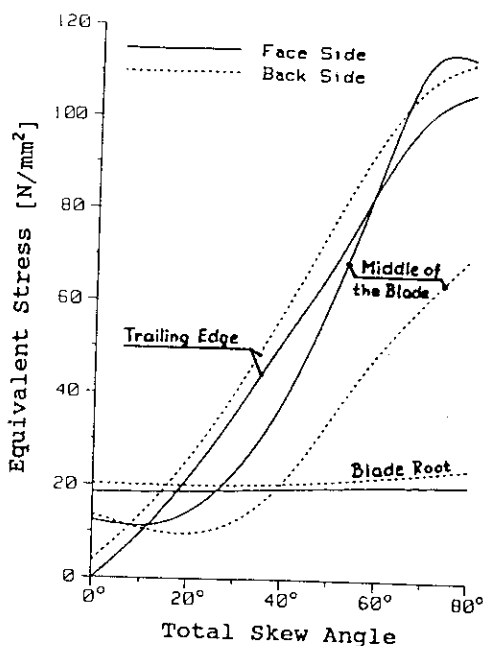
### DEVERS (suite)

L'efficacité du dévers pour réduire le champ de pression instationnaire autour d'une hélice, est illustrée par des résultats d'essais avec des pales de dévers variable. Les pressions ont été mesurées sur une paroi proche de l'hélice en fonctionnement cavitant et non-cavitant. Les signaux des pressions ont faits l'objet d'une décomposition harmoniques basée sur des multiples de la fréquence de pale. L'amplitude de la pression pour chaque harmonique est adimensionnée par  $\rho n^2 D^2$ . On constate une diminution remarquable du signal à la BR de 96% entre un dévers nul et un dévers de 75° sur une hélice à quatre pale au même point de fonctionnement. On note aussi une influence de la cavitation qui augmente d'un facteur 2 le niveau des pressions mesurées.

Sur les figures suivantes, on illustre le fait que la présence de devers complique sensiblement le problème du concepteur en matière de tenue mécanique. En effet, la présence de devers génère des contraintes importantes le long du bord de fuite.



Influence du dévers sur les pressions fluctuantes



Influence du dévers sur les contraintes dans la pale

## ELEMENTS DE CONCEPTION - 12

### DEVERS (suite)

En ce qui concerne les effets "secondaires" de l'introduction de dévers, on peut citer:

- Relativement indifférent vis à vis du rendement
- Implications importantes sur les contraintes mécaniques surtout en marche arrière
- Interférences à vérifier sur une hélice à pas variable
- Par construction, et du fait des conventions utilisées, le dévers génère de l'inclinaison. Il peut alors être nécessaire d'introduire de l'inclinaison négative pour éliminer cet effet.

### INCLINAISON

- L'inclinaison a essentiellement une influence sur les contraintes, notamment en pied de pale. Une inclinaison arrière tend à accentuer les contraintes dues à la poussée. Une inclinaison vers l'avant peut compenser les contraintes dues à la poussée.
- Le concepteur peut aussi introduire de l'inclinaison pour réduire l'inclinaison induite par la présence de dévers.

### EPAISSEUR

Des modifications importantes (50 à 100%) de la distribution radiale d'épaisseur influencent les performances de l'hélice de manière significative comme on peut le constater sur le graphe ci-joint. Dans les projets commerciaux, les épaisseurs sont généralement minimales pour réduire le coût de l'hélice.

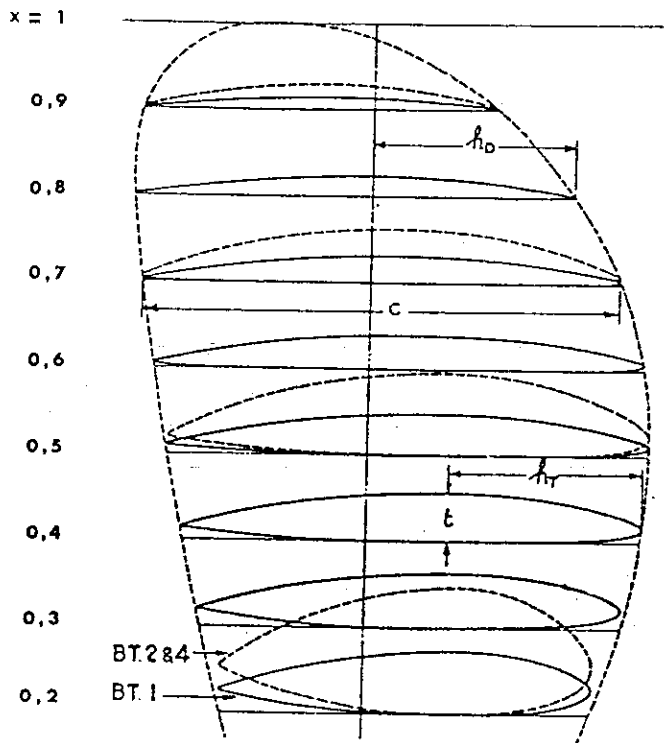
Sur les bâtiments de surface relativement rapide (>25 noeuds), les contraintes de cavitation amènent à des épaisseurs relatives de sections très faibles en bout de pale (<5%). Si par ailleurs les cordes ont été réduites au minimum pour optimiser le rendement, et qu'un dévers important a été incorporé pour réduire le bruit, on se rend compte que la pale ne tiendra pas... Le projet se transforme alors en une suite d'itérations entre les performances hydrodynamiques et la tenue mécanique. Le calcul de structure par éléments finis (qui utilise le chargement hydrodynamique calculé) est donc indispensable pour converger sur un projet viable.

En ce qui concerne les sous-marins, les propriétés mécaniques de la pale qui sont en partie conditionnées par l'épaisseur, sont classifiées.

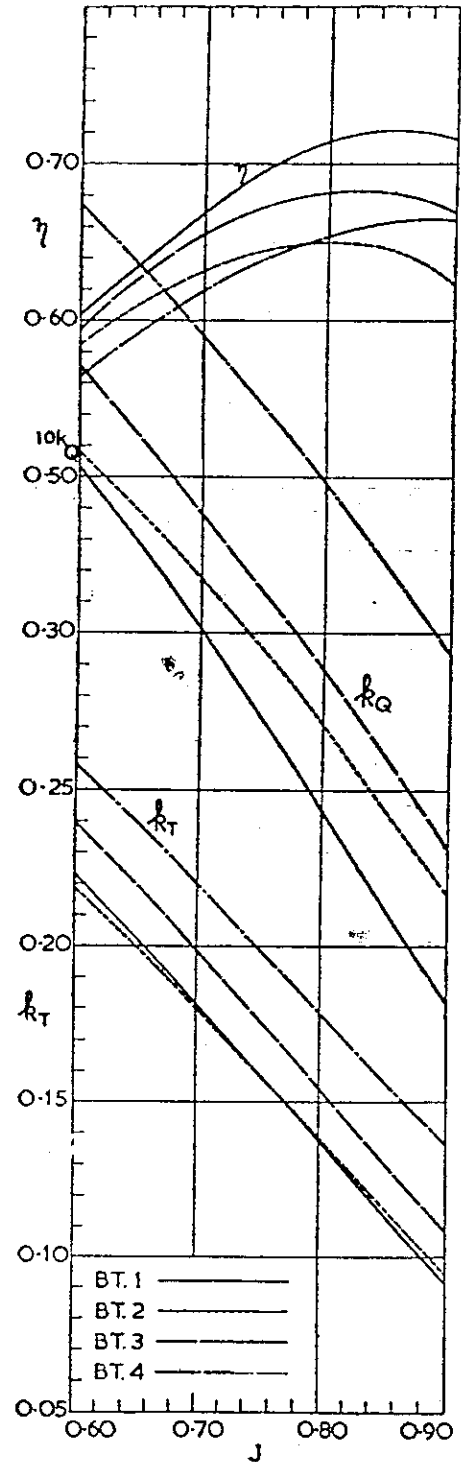
Pour les projets d'hélice commerciaux, le concepteur est généralement aidé par les règles des sociétés de classification qu'il doit suivre: Bureau Veritas, De Norske Veritas, Lloyds Register, American Bureau of Shipping. Néanmoins, les sociétés de classification peuvent admettre des projets plus "pointus" si le concepteur peut justifier son dimensionnement. Cette démarche peut être nécessaire pour proposer au client une hélice plus compétitive.

# ELEMENTS DE CONCEPTION - 13

## EPAISSEUR (suite)



- BT. 1 : pas réduit  $H/D$  à  $0,7 R : 1,02$
- BT. 2 : - épaisseurs augmentées de 100 %  
- pas diminué de 7,5 %
- BT. 3 : - épaisseurs augmentées de 50%  
- pas inchangé
- BT. 4 : - épaisseurs augmentées de 100 %  
- pas inchangé



## **4. SIMILITUDE**

## SIMILITUDE - 1

### ANALYSE DIMENSIONNELLE

On choisit toutes les grandeurs physiques susceptibles d'influencer les performances d'une hélice marine et on relève leurs dimensions :

$\rho$	Densité	kg/m <sup>3</sup>	M/L <sup>3</sup>
D	Diamètre	m	L
$V_a$	Vitesse d'avance	m/s	L/T
g	Gravité	m/s <sup>2</sup>	L/T <sup>2</sup>
n	Vitesse de rotation	tr/s	1/T
P	Pression	N/m <sup>2</sup>	ML/T <sup>2</sup> /L <sup>2</sup> = M/L/T <sup>2</sup>
$\mu$	Viscosité dynamique	kg/m/s	M/L/T
T	Poussée	N	ML/T <sup>2</sup>

On écrit que la poussée de l'hélice est proportionnelle au produit de ces grandeurs physiques à des exposants inconnus.

$$T = \forall (\rho^a \cdot D^b \cdot V_a^c \cdot g^d \cdot n^e \cdot P^f \cdot \mu^g)$$

On écrit que les dimensions de ces termes doivent être compatibles:

$$\left(\frac{ML}{T^2}\right) = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a (L)^b \left(\frac{L}{T}\right)^c \left(\frac{L}{T^2}\right)^d \left(\frac{1}{T}\right)^e \left(\frac{M}{LT^2}\right)^f \left(\frac{M}{LT}\right)^g$$

En regroupant les exposants de M, L, T on obtient les égalités suivantes:

$$M^1 = M^{a+f+g}$$

$$L^1 = L^{-3a+b+c+d-f-g}$$

$$T^{-2} = T^{-c-2d-e-2f-g}$$

et donc le système suivant

$$(1) \quad a = 1 \quad - f - g$$

$$(2) \quad b = 1 + 3a - c - d \quad + f + g$$

$$(3) \quad c = 2 \quad - 2d - e - 2f - g$$

que l'on peut réduire au système suivant

$$(1) \quad a = 1 \quad - f - g$$

$$(2) \quad b = 2 + d + e \quad - g$$

$$(3) \quad c = 2 - 2d - e - 2f - g$$

En remplaçant les exposants connus, on exprime la poussée:

$$T = \forall \left[ \rho^{(1-f-g)} \cdot D^{(2+d+e-g)} \cdot V_a^{(2-2d-e-2f-g)} \cdot g^{(d)} \cdot n^{(e)} \cdot P^{(f)} \cdot \mu^{(g)} \right]$$

$$T = \forall \left( \rho D^2 V_a^2 \right) \cdot \left[ \left( \frac{gD}{V_a^2} \right)^d \cdot \left( \frac{nD}{V_a} \right)^e \cdot \left( \frac{P}{\rho V_a^2} \right)^f \cdot \left( \frac{\mu}{\rho D V_a} \right)^g \right]$$

On peut alors choisir d, e, f, g de manière arbitraire. On choisit les exposants permettant de retrouver les combinaisons usuelles:

$$d=-2; e=-1; f=1; g=-1 \text{ en remplaçant } \mu \text{ par } \rho \nu$$

## SIMILITUDE - 2

### COEFFICIENTS ADIMENSIONNES

On obtient alors un coefficient de poussée fonction de 4 nombres :

$$\frac{T}{\rho D^2 V_a^2} = f\left(\frac{V_a}{\sqrt{gD}}, \frac{V_a}{nD}, \frac{P}{\rho V_a^2}, \frac{V_a D}{\nu}\right)$$

Coefficient de poussée	$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A_o V_a^2}$ avec $A_o = \frac{\pi D^2}{4}$
Nombre de Froude basé sur le diamètre	$F_{np} = \frac{V}{\sqrt{gD}}$
Paramètre d'avance	$J = \frac{V_a}{nD}$
Coefficient de pression	$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_a^2}$
Nombre de Reynolds basé sur D	$Re = \frac{V_a \cdot D}{\nu}$

A partir de cette analyse on peut garantir les résultats à n'importe quelle échelle tant que ces nombres sont respectés. On analyse la manière dont les grandeurs physiques changent avec  $\lambda$ , le facteur d'échelle, qui est tel que  $D_r = \lambda D_m$  avec  $\lambda \geq 1$ . Les indices "r" et "m" font référence à des données "réel" et "modèle" respectivement.

#### Paramètre d'avance

$$J \Rightarrow \frac{V_r}{n_r \lambda D_m} = \frac{V_m}{n_m D_m} \Rightarrow \frac{n_m}{n_r} = \lambda \frac{V_m}{V_r}$$

#### Coefficient de poussée

$$C_T \Rightarrow \frac{T_r}{\rho_r \lambda^2 D_m^2 V_r^2} = \frac{T_m}{\rho_m D_m^2 V_m^2} \text{ avec } \rho_r \cong \rho_m \Rightarrow \frac{T_m}{T_r} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{V_m}{V_r}\right)^2$$

#### Coefficient de pression

$$C_p \Rightarrow \frac{P_r}{\rho_r V_r^2} = \frac{P_m}{\rho_m V_m^2} \text{ avec } \rho_r \cong \rho_m \Rightarrow \frac{P_m}{P_r} = \left(\frac{V_m}{V_r}\right)^2$$

#### Nombre de Reynolds

$$Re \Rightarrow V_r D_r = V_m D_m \text{ avec } \nu_r \cong \nu_m$$

$$\Rightarrow \frac{V_m}{V_r} = \lambda; \quad \frac{n_m}{n_r} = \lambda^2; \quad \frac{T_m}{T_r} = 1; \quad \frac{P_m}{P_r} = \lambda^2; \quad \frac{Fn_m}{Fn_r} = \lambda^{3/2}$$

#### Nombre de Froude

$$Fn \Rightarrow \frac{V_r}{\sqrt{D_r}} = \frac{V_m}{\sqrt{D_m}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_m}{V_r} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad \frac{n_m}{n_r} = \sqrt{\lambda}; \quad \frac{T_m}{T_r} = \frac{1}{\lambda^3}; \quad \frac{P_m}{P_r} = \frac{1}{\lambda}; \quad \frac{Re_m}{Re_r} = \frac{1}{\lambda^{3/2}}$$

**On constate que les similitudes selon Re sont différentes de celles selon Fn.**



## SIMILITUDE - 3

### FROUDE ET REYNOLDS

On étudie le comportement des relations de similitudes selon Re et Fn pour un navire typique: 100 m, 20 noeuds, 120 t/min, hélice de 4 m de diamètre, poussée 100 tonnes, échelle 1/16.

		Réel	Modèle Re	Modèle Fn
1/Echelle	$\lambda$	1	16	16
Longueur	L (m)	100	6.25	6.25
Vitesse	V (noeuds)	20	320	5
Nombre tour	n (tr/s)	2	512	8
Poussée	T (tonne)	100	100	0.02
Pression	P (bar)	1	256	0.22*
$Re_r/Re_m$		1	1	64
$Fn_m/Fn_r$		1	64	1

\* on prend en compte ici la réduction de pression hydrostatique au modèle

On note sur ce tableau les différences irréconciliables qu'il existe entre la similitude de Froude et celle de Reynolds lorsque l'on s'éloigne de l'échelle 1. On constate les difficultés qu'impliquerait la similitude de Re dans le même fluide (effort réel, vitesse de 320 noeuds, etc.) Pour obtenir la similitude de nombre de Reynolds à échelle réduite il faut utiliser un fluide de très faible viscosité: une certaine phase d'hélium liquide a été utilisée aux Etats-Unis sur un corps axisymétrique de très faible dimension en similitude de Reynolds avec le réel.

La similitude de Froude correspond à des vitesses et des efforts compatibles avec des essais en laboratoire. C'est la similitude utilisée en bassin de traction. On note néanmoins que pour obtenir la similitude de pression en similitude de Fn il faut baisser la pression ambiante de manière importante, c'est le rôle des tunnels de cavitation. L'utilisation de l'eau est nécessaire pour reproduire la cavitation et donc on ne peut pas obtenir la similitude de Reynolds à échelle réduite. La similitude de Fn entraîne par ailleurs des vitesses et des nombres de Reynolds très faibles dont on peut se soucier des effets. Il faudra donc comprendre l'influence de ces paramètres sur les performances de l'hélice pour pouvoir éventuellement violer ces similitudes avec la conscience tranquille...

#### En quoi la similitude de Fn est-elle utile ?

Le nombre de Froude représente le rapport des pressions ou forces de gravité et des pressions ou forces dynamiques. On distingue deux mécanismes selon lesquels le nombre de Froude peut affecter le comportement de l'hélice.

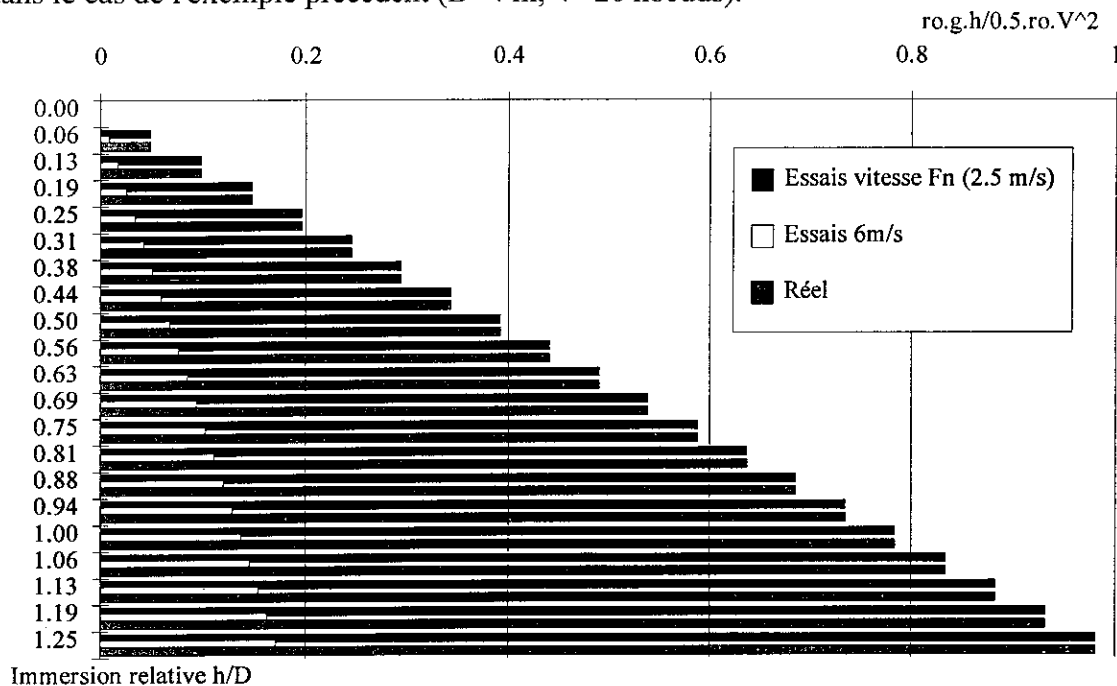
Le premier, bien connu pour les bâtiments de surface, fait intervenir la surface libre et le champ de vagues. Des valeurs de Fn très importants, ou la présence d'une paroi éliminent les déformations de la surface libre et modifient le champ de vitesse. Néanmoins, cet effet est minime et est généralement négligé, en particulier pour les sous-marins cet effet est inexistant.

Le second mécanisme, qui joue sur le comportement cavitant, concerne le respect de la pression hydrostatique qui varie sur la hauteur du disque de l'hélice. Le respect de la similitude de Froude permet de conserver une proportion de pression dynamique et de pression hydrostatique identique au réel sur tout le disque. L'effet du gradient de pression hydrostatique est plus important pour de grandes hélices sur des navires lents. Plus la vitesse du navire est élevé ou plus le diamètre de l'hélice est petit, plus cet effet est faible. Sur les hélices de navires rapides (a fortiori pour de petites hélices) cet effet est généralement négligé au profit d'un Re plus élevé.

## SIMILITUDE - 4

### FROUDE ET REYNOLDS (suite)

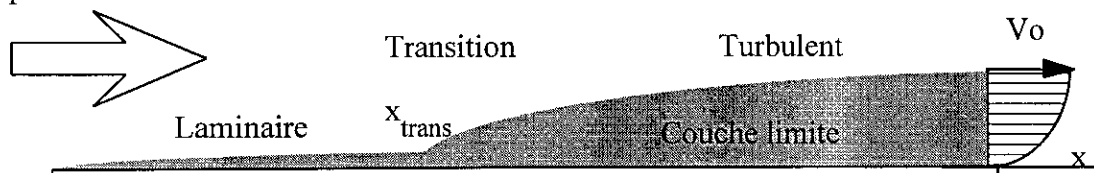
Cet effet est illustré sur le graphe suivant où l'on porte pour le réel et pour le modèle le rapport de la pression hydrostatique sur la pression dynamique en fonction de l'immersion dans le cas de l'exemple précédent (D=4 m, V=20 noeuds).



Dans les cas où la vitesse Froude n'est pas respectée (essais en tunnel à  $Re$  élevé par exemple, la similitude de pression est obtenue en une position verticale privilégiée en réglant la pression de la veine. Cette position est généralement choisie proche du rayon  $0.7 R$  de la pale en position verticale qui est typiquement la position la plus critique vis-a-vis des phénomènes de cavitation.

#### Que faire de la similitude de Reynolds?

Le nombre de Reynolds régit le développement des effets visqueux, notamment les couches limites, leurs stabilité, et les décollements. On distingue 2 régimes d'écoulement de couche limite. Le premier, laminaire est caractérisé par des trajectoires de particules parallèles, des épaisseurs de couche limite et des coefficients de frottement faibles. Le second, est un écoulement turbulent caractérisé par des épaisseurs de couche limite et des coefficients de frottement plus importants. Un écoulement sur une paroi lisse passe du régime laminaire à un régime turbulent suite à une transition créée par la perte de stabilité de l'écoulement laminaire. Cette transition se situe autour de  $Re_x = \frac{V_0 \cdot x_{trans}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$  pour une plaque plane.



## SIMILITUDE - 5

### FROUDE ET REYNOLDS (suite)

Même si l'on ne peut atteindre une valeur du Re identique au réel lors d'essais, l'influence du nombre de Re est beaucoup plus prédictible si la couche limite est du même type qu'au réel, c'est à dire en règle générale turbulente. Dans ce cas, il est possible de faire des corrections entre un coefficient de frottement présumé turbulent à faible Re au modèle et un coefficient de frottement à haut Re au réel. La disparité des nombres de Re entre modèle et réel influence le fonctionnement de l'hélice de deux manières différentes: par le champ de vitesse dans le disque de l'hélice qui varie avec Re, et par l'écoulement sur les pales de l'hélice, en particulier les pertes dues au frottement sont fonction du Re.

En ce qui concerne le sillage, l'effet de Re modifie la vitesse débitante dans le disque hélice qui est généralement plus faible au modèle qu'au réel. Cet effet influence le point de fonctionnement mesuré au modèle et des corrections sont effectuées (extrapolation du coefficient de sillage) pour estimer le point de fonctionnement au réel. Par ailleurs, la modification de la distribution des vitesses dans le disque d'hélice (carte de sillage) a une importance lors des essais de cavitation car la dynamique de la cavitation dépend fortement de cette dernière. Il faut donc s'attacher à reproduire le sillage réel (cf chapitre sillage).

En ce qui concerne l'écoulement sur les pales, et compte tenu de la différence de Re il est nécessaire d'extrapoler les performances mesurées en bassin ou en tunnel pour obtenir les performances au réel. Cette correction est d'autant plus faible que le Re au modèle est élevé, et l'expérience montre qu'il ne faut pas descendre en dessous d'une certaine taille de propulseur afin de s'affranchir de gros effets d'échelle, et plus particulièrement des problèmes de décollement laminaire associés à des Re trop faibles. Il est intéressant d'estimer la taille minimale d'un modèle d'hélice sur lequel la transition s'effectuerait de manière naturelle sur une section représentative de la pale. Ici encore on prend la section à 0.7 R, de corde C, dans un écoulement relatif  $V_r$  et on se donne un critère de Re minimal pour cette section:

$$Re_{0.7R} = \frac{V_r \cdot C_{0.7R}}{\nu} > 5.10^5$$

$$V_r^2_{0.7R} = (2\pi n 0.7R)^2 + V_a^2 = V_a^2 \left[ \left( \frac{0.7\pi n D}{V_a} \right)^2 + 1 \right] = V_a^2 \left[ \left( \frac{0.7\pi}{J} \right)^2 + 1 \right]$$

$$\Rightarrow V_{r0.7R} = 2.4 \cdot V_a \quad \text{avec } J \cong 1$$

$$\Rightarrow Re_{0.7R} = \frac{2.4 \cdot V_a \cdot C_{0.7R}}{\nu} > 5.10^5 \quad \Rightarrow \quad V_a \cdot C_{0.7R} \geq 0.20 (\text{m}^2 / \text{s})$$

Si on reprend l'exemple précédent, soit une maquette de 6.25 m à 2.5 m/s avec une hélice de 25 cm de diamètre (échelle 1/16), on constate que la corde minimale requise selon ce critère est de 8 cm, ce qui correspond approximativement à une valeur typique de corde l'hélice ( $C/D=0.3$ ). Il est néanmoins difficile de généraliser car la transition dépend fortement de la distribution de pression sur la pale et donc de la forme des sections et du point de fonctionnement. Il faut donc faire attention aux hélices aux sections spéciales qui peuvent avoir des comportements pervers vis-à-vis de Re.

En tout état de cause, c'est cette contrainte qui a imposé la taille des maquettes, et conséquemment les dimensions des grands bassin de traction. Les maquettes font de 6 à 10 m de long et les bassins ont des sections de plus de 10 m de large par 3 m de fond. En ce qui concerne les essais de résistance uniquement, et donc sans les contraintes liées à la taille des propulseurs, les modèles peuvent être plus courts pour certaines carènes comme les coques planantes.

## SIMILITUDE - 6

### COEFFICIENT DE PRESSION

On a vu dans l'analyse dimensionnelle que le coefficient de pression permettait de garder la similitude des pressions. Il faut néanmoins faire apparaître un niveau de pression de référence et  $P = P_0$  qui est la pression statique dans l'écoulement à l'infini amont quand  $V = V_0$ . On a donc le coefficient de pression en tout point M donné:

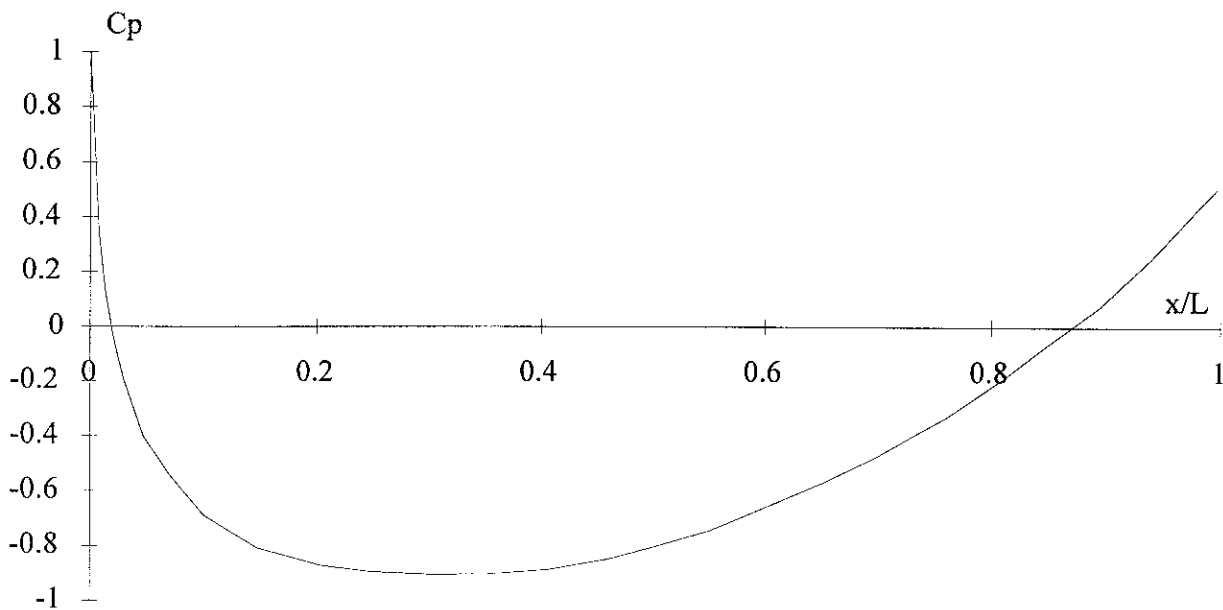
$$C_p(M) = \frac{P(M) - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2}$$

Le facteur 0.5 au dénominateur est introduit pour faciliter l'utilisation du coefficient de pression dans l'équation de Bernoulli. Sur une ligne de courant dans un écoulement parfait, la conservation de l'énergie s'écrit suivant l'équation de Bernoulli:

$$P(M) + \frac{1}{2} \rho V(M)^2 = \text{cte} = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad \text{d'où:} \quad \frac{P(M) - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} = 1.0 - \frac{\frac{1}{2} \rho V(M)^2}{\frac{1}{2} \rho V_0^2}$$

$$\text{ou} \quad C_p(M) = 1.0 - \left( \frac{V(M)}{V_0} \right)^2$$

Si il n'y a pas de pertes de charge, la distribution de  $C_p$  sur une ligne de courant, en particulier le long d'un corps, est directement reliée à la variation de la vitesse le long de cette ligne de courant. On peut donc indifféremment spécifier un écoulement sur un corps profilé par une distribution de pression ou de vitesse à sa surface. On considère ci-dessous l'exemple d'un corps axisymétrique de longueur  $L$  caractérisé par une distribution de  $C_p$ . On note que le  $C_p$  atteint une valeur de 1 ( $V=0$ ) au nez (point d'arrêt).



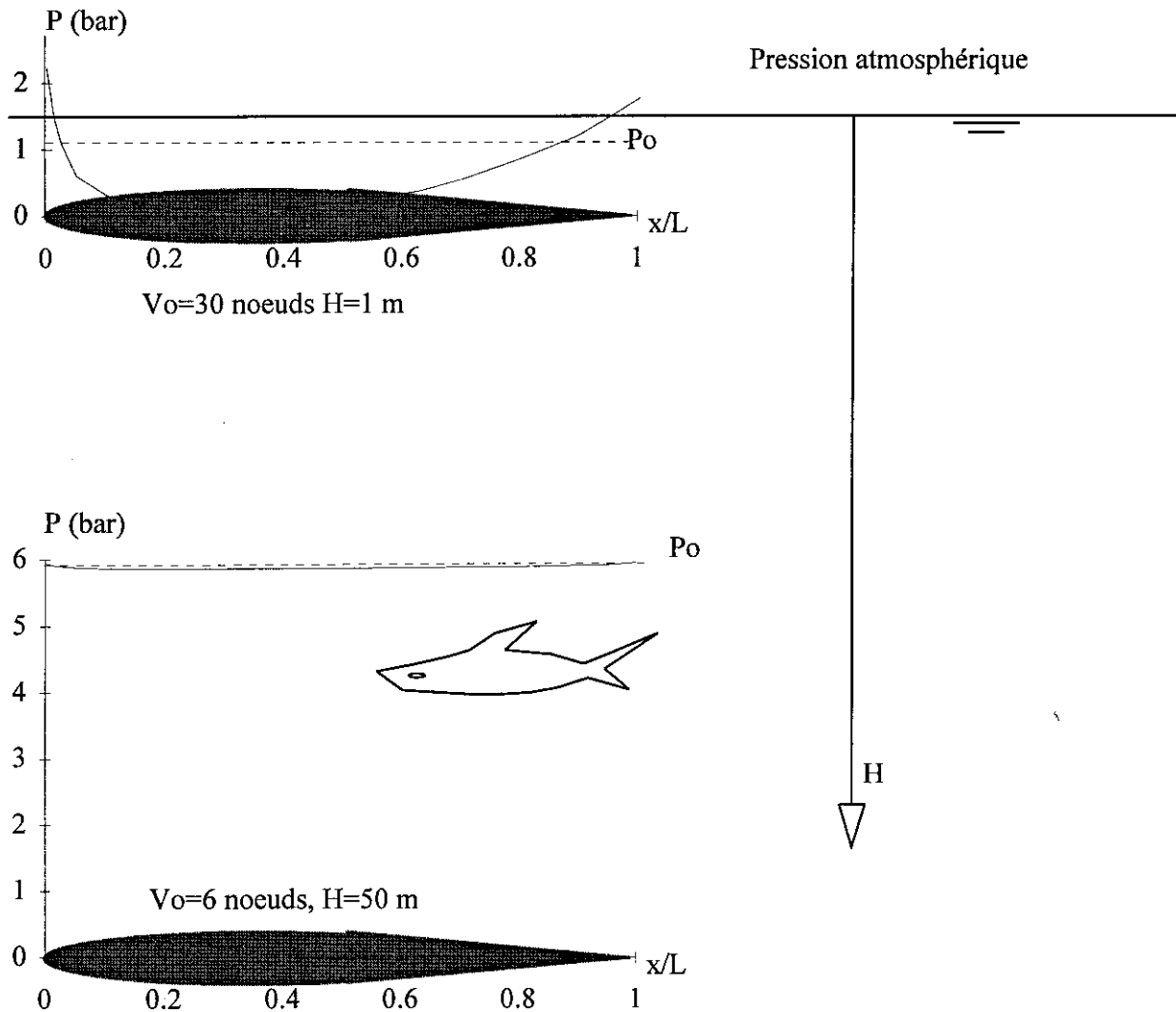
Distribution de pression le long d'un corps de révolution  
(calcul potentiel)

## SIMILITUDE - 7

### PRESSION

La pression de référence au réel comprend la pression atmosphérique et la pression hydrostatique ( $\rho g H$ ) où  $H$  est l'immersion. Pour la distribution de coefficient de pression présentée sur la page précédente on calcule la distribution de pression sur le corps pour différentes immersions et différentes vitesses:

$$P\left(\frac{x}{L}\right) = P_o + \frac{1}{2} \rho V_o^2 C_p\left(\frac{x}{L}\right) \text{ avec } P_o = P_{\text{atm}} + \rho g H$$



Distribution de pression correspondant à la même distribution de coefficient de pression pour 2 conditions différentes: 6 noeuds, 1 mètre d'immersion et 30 noeuds, 50 mètres d'immersion

On constate ainsi que pour une même distribution du coefficient de pression les valeurs de la pression sur un corps donné peuvent varier de manière considérable.

## SIMILITUDE - 8

### PARAMETRE DE CAVITATION

Comme le fluide peut changer de phase (vaporisation) proche d'une pression absolue connue, il est utile de faire apparaître l'écart entre la pression de référence et une pression dite de "susceptibilité" qui correspond à l'apparition de la cavitation et qui dépend de la pression vapeur ainsi que de la qualité de l'eau (cf cours de cavitation). En première approximation, la pression de susceptibilité utilisée est la pression de vapeur saturante du fluide à la température du fluide ( $P_v$ ). Le nombre ainsi constitué est appelé nombre de cavitation ou nombre de Thomas:

$$\sigma_v = \frac{P_o - P_v}{\frac{1}{2}\rho V_o^2}$$

**Une similitude de  $\sigma$  entre deux écoulements, signifie simplement que, si on est en similitude géométrique et en dehors d'autres effets d'échelle, la pression vapeur est atteinte en des points géométriquement semblables au modèle et au réel.** Si cette similitude permet de "recaler" les niveaux des pressions autour de  $P_v$ , elle n'est pas suffisante pour obtenir une similitude des pressions. La seule manière d'obtenir une similitude de pression est de réaliser les essais à même vitesse d'avance ou même vitesse tangentielle n.D, avec la même pression de référence  $P_o$ .

Il est aisé et utile d'introduire le paramètre de cavitation dans le coefficient de pression:

$$Cp(M) = \frac{P(M) - P_v}{\frac{1}{2}\rho V_o^2} + \frac{P_v - P_o}{\frac{1}{2}\rho V_o^2} = \frac{P(M) - P_v}{\frac{1}{2}\rho V_o^2} - \sigma_v$$
$$\Rightarrow Cp(M) + \sigma_v = \frac{P(M) - P_v}{\frac{1}{2}\rho V_o^2}$$

Si l'on considère que les risques d'apparition de la cavitation sont importants lorsque la pression locale  $P(M)$  est inférieure à  $P_v$ , on a donc un risque de cavitation lorsque:

$$Cp(M) \leq -\sigma_v$$

Compte tenu des problèmes d'effet de  $Re$  sur le sillage et le  $J$ , il est préférable d'utiliser un nombre de cavitation non pas basé sur la vitesse d'avance, mais plutôt, basé sur la vitesse relative  $V_r$  de la section de la pale:

$$V_r^2 = V_a^2 + (\pi \cdot n \cdot D)^2$$

ou, plus simplement, basé sur la vitesse de rotation représenté par n.D ce qui est similaire puisque, compte tenu des valeurs de  $J$  usuelles, la vitesse tangentielle est plus grande que la vitesse axiale (facteur 2 à 3 à 0.7 R). On a donc:

$$\sigma_n = \frac{P_o - P_v}{\frac{1}{2}\rho(n \cdot D)^2} = \sigma_v \cdot J^2 \quad \text{où } J = \frac{V_a}{n \cdot D}$$

L'intérêt d'utiliser  $\sigma_n$  plutôt que  $\sigma_v$  réside dans le fait que la vitesse d'avance, et notamment le sillage est moins bien connu que le nombre de tour qui est facilement mesurable, même au réel. Lors d'essais de cavitation où l'on reproduit un point de fonctionnement sur la base d'un  $K_t$  identique, il est préférable d'utiliser la même vitesse de référence: n.D. En effet compte tenu des différences que l'on peut trouver au modèle sur le sillage, il est préférable de rapporter les pressions à la vitesse de rotation. L'utilisation de  $\sigma_n$  permet ainsi de prendre en compte en partie les effets d'échelle sur le sillage.

## SIMILITUDE - 9

### HYDROELASTICITE

Une des similitudes qui n'a pas été traitée précédemment concerne les problèmes d'hydro-élasticité; c'est à dire l'interaction du fluide avec un corps élastique. Cette similitude permet de reproduire les déformations de la pale sous contrainte hydrodynamique, ainsi que les vibrations de la pale engendrées par une excitation hydrodynamique. C'est le cas notamment du "chant" d'hélice qui est du à des modes de vibration du bord de fuite qui sont excités par la turbulence présents dans le décollement au bord de fuite.

Pour obtenir une similitude hydro-élastique, le modèle doit alors avoir une structure en similitude élastique, avec les mêmes modes propres (raideurs et masses). Il est en fait généralement possible de réaliser un modèle d'hélice avec le même matériau qu'au réel et la similarité élastique est obtenue facilement.

En ce qui concerne les contraintes liées aux efforts hydrodynamiques, on cherche à obtenir le même rapport effort/surface. Il faut donc réaliser une similitude de pression, qui est obtenue lors d'essais en eau à la même vitesse qu'au réel (similitude de Mach!). Ceci est évidemment contraire aux similitudes de Froude ( $1/\sqrt{\lambda}$ ) et de Reynolds ( $\lambda$ ). Les contraintes liées aux efforts centrifuges sont dans ce cas aussi en similitude.

On constate donc que la possibilité de fonctionner à vitesse réelle avec un modèle en similitude géométrique et réalisé de manière identique au réel, permet d'obtenir sur modèle un comportement statique (déflexions) et dynamique (vibrations) similaire au réel. Pour certains projets d'hélice, cette similitude est essentielle à l'étude du bruit d'une hélice. Les nouveaux moyens d'essais tels que les grands tunnels hydrodynamiques, silencieux, capables de vitesse veine de 20 m/s tel que le GTH au Bassin d'Essais des Carènes sont particulièrement bien adaptés à ce type d'essais.

### CHOIX D'UNE VITESSE D'ESSAIS

En conclusion, on peut noter que pour réaliser des essais d'hélice sur modèle, on a le choix entre la vitesse de Froude (relativement faible), la vitesse de Mach (la même qu'au réel), la vitesse la plus grande possible pour s'approcher de la similitude de Re. Le choix de la vitesse à adopter pour les essais dépend des performances que l'on cherche à reproduire (bruit, cavitation, efforts), mais aussi de considérations pratiques (étendue de mesure du dynamomètre, performance de la motorisation), sachant qu'une similitude parfaite n'existe qu'à l'échelle 1.

## SIMILITUDE - 10

### COEFFICIENTS USUELS

Coefficients de poussée

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A_0 V_a^2}$$

Coefficients basés sur la vitesse de rotation:

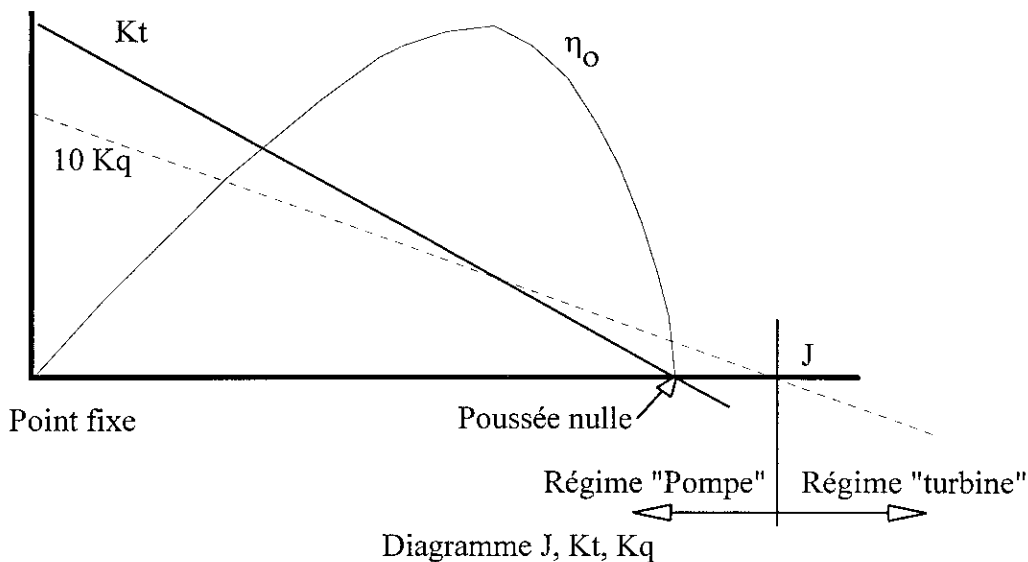
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vitesse: } J = \frac{V_a}{nD} \quad \text{valeurs usuelles: } 0.6 \text{ à } 1.5 \\ \text{Poussée: } K_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \quad \text{valeurs usuelles: } 0.1 \text{ à } 0.5 \\ \text{Poussée: } C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A_0 V_a^2} = \frac{K_T \rho n^2 D^4}{\frac{1}{8} \rho \pi D^2 V_a^2} = \frac{8 K_T}{\pi J^2} \quad \text{valeurs usuelles: } 0.5 \text{ à } 1.0 \\ \text{Couple: } K_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} \\ \text{Pression: } \sigma_n = \frac{P_o - P_v}{\frac{1}{2} \rho (n.D)^2} \end{array} \right.$$

Rendement:

$$\eta_o = \frac{T \cdot V_a}{Q \cdot \omega} = \frac{K_T \rho n^2 D^4 \cdot V_a}{K_Q \rho n^2 D^5 \cdot 2\pi n} = \frac{V_a}{nD} \frac{1}{2\pi} \frac{K_T}{K_Q}$$

$$\Rightarrow \eta_o = \frac{J}{2\pi} \frac{K_T}{K_Q} \quad \text{valeurs usuelles: } 0.6 \text{ à } 0.75$$

$$\Rightarrow \frac{K_T}{K_Q} \approx \frac{2\pi}{J} \approx \quad \text{valeurs usuelles: } 6 \text{ à } 10 \quad (2 \text{ échelles})$$



## **5. PROPULSION ET RENDEMENTS**

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 1

L'identification du point de fonctionnement (poussée, nombre de tour) et des interactions hélice-carène est basée de manière classique sur une procédure d'essais qui comporte 3 essais: l'essai de traction de la carène, l'essai d'eau libre, l'essai d'autopropulsion.

### ESSAIS DE TRACTION

L'essai de traction est relativement simple. Il s'agit de mesurer la résistance de la maquette sur une jauge extensométrique, la maquette étant libre en tangage et pilonnement (assiette et enfoncement) mais bridée en lacet et embardé. La maquette est équipée de ses appendices (lignes d'arbre, quilles antiroulis, safrans, etc.) ainsi que d'un stimulateur de turbulence placé en aval de l'étrave à environ 5 à 10% de la longueur du navire, position à laquelle on s'attend à la transition au réel. Lors de la traction on règle l'axe de traction de manière à ce qu'il reste aligné avec la ligne d'arbre de manière à reproduire correctement les moments longitudinaux induits par la poussée.

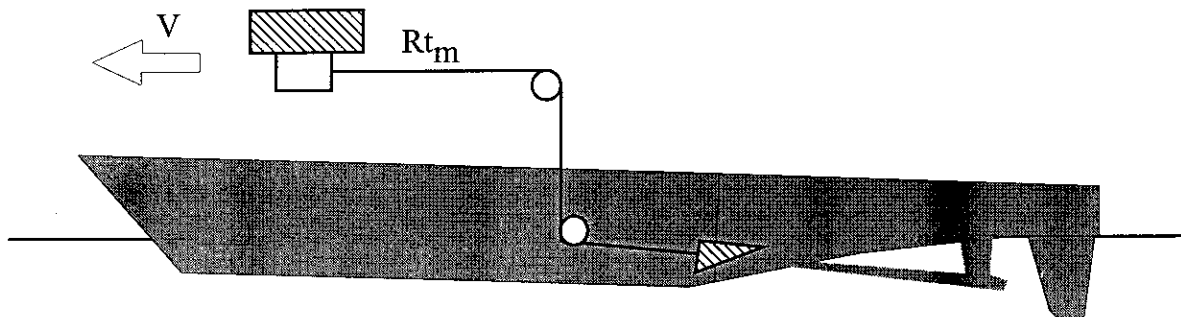


Schéma du montage de l'essai de traction

On exploite ces données en calculant des coefficients de traînée basés sur "S" la surface mouillée du modèle ou du navire et "V" la vitesse du modèle ou du navire:  $C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho S V^2}$

On définit alors les coefficients suivants:

$C_t$  Coefficient de traînée totale

$C_w$  Coefficient de traînée résiduelle ou résistance de vague

$C_v$  Coefficient de traînée visqueuse

$C_{fo}$  Coefficient de frottement de type plaque plane ("courbe de corrélation")

$$C_{w_m} = C_{t_m} - C_{v_m} \text{ avec } C_{v_m} = C_{fo_m} (1 + k_m)$$

L'indice "m" fait référence aux données modèle.

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 2

### EXTRAPOLATION DE LA RESISTANCE

Ces mesures sont extrapolées au réel par une méthode de type Froude ou BA59, ou ITTC 78. Ces méthodes diffèrent dans le détail. Néanmoins il s'agit suivant les hypothèses de Froude d'identifier au modèle la résistance de vague ou résistance "résiduelle" en soustrayant à la résistance totale, la résistance visqueuse que l'on estime similaire à celle d'une plaque plane au même surface au même nombre de Reynolds et en écoulement turbulent majorée d'un coefficient de forme (1+k).

Hypothèse de Froude:  $Cw_r = Cw_m = Cw$

Hypothèse ITTC78:  $k_r = k_m = k$

Convention ITTC:  $Cfo = \frac{0.075}{(\log(Re) - 2)^2}$

Corrections de résistance aérodynamique ( $\Delta Ca$ ) et rugosité ( $\Delta Cf$ )

$\Rightarrow Ct_r = Cw + Cv_r + \Delta Ca + \Delta Cf$  avec  $Cv_r = Cfo_r (1+k)$

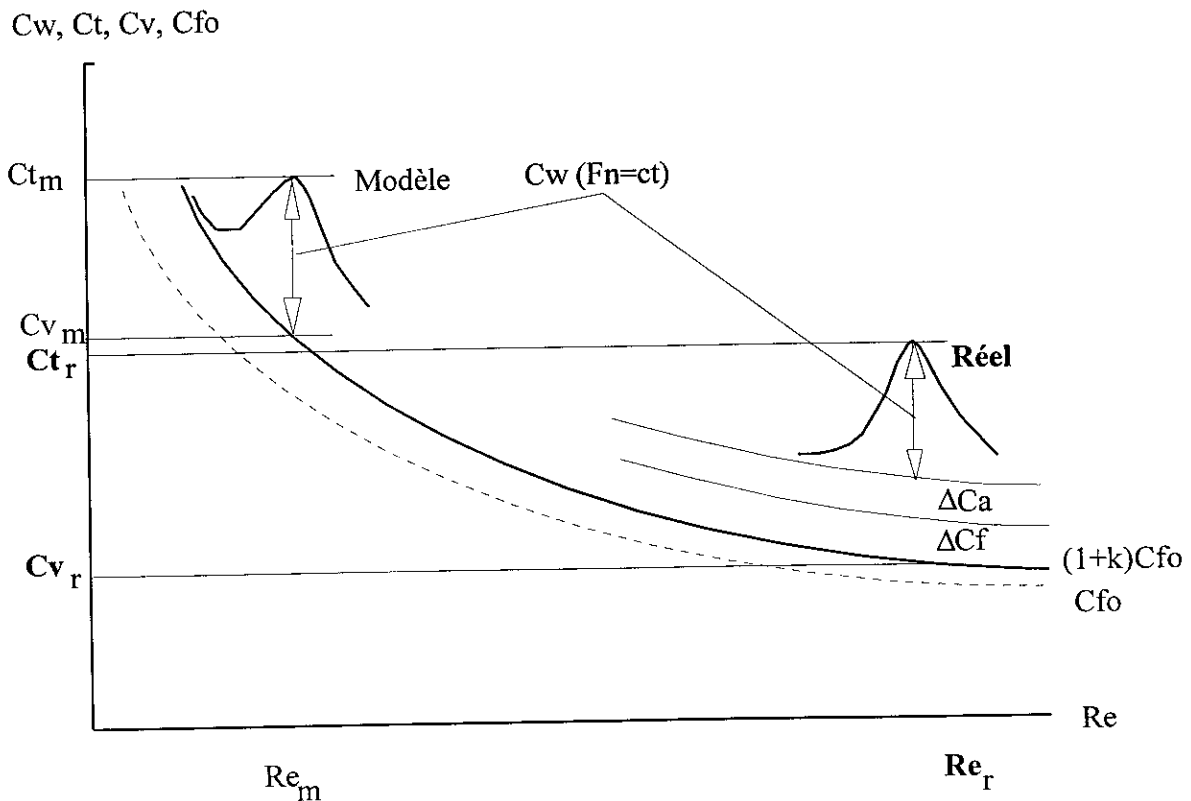
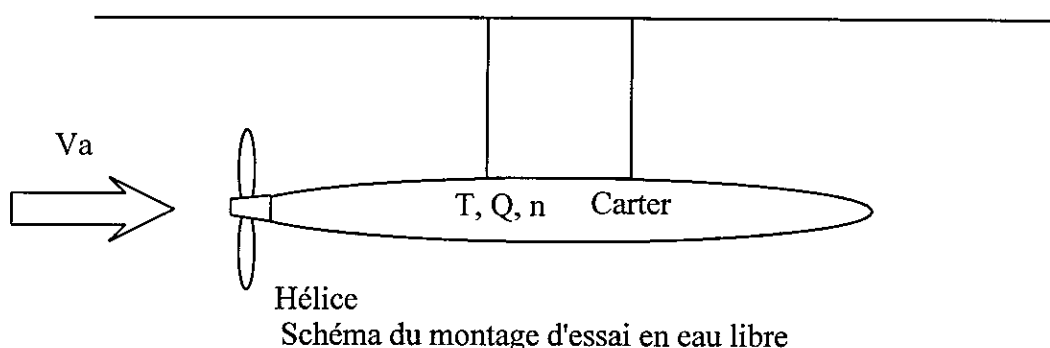


Diagramme d'extrapolation de la résistance à l'avancement

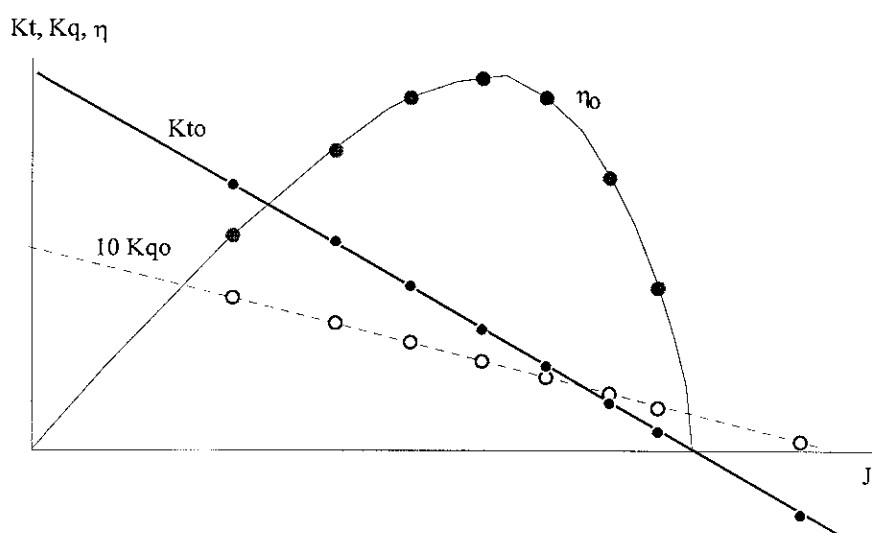
## PROPULSION ET RENDEMENTS - 3

### ESSAIS D'EAU LIBRE

Le but de l'essai d'eau libre est de générer le diagramme  $J, K_t, K_q$  de l'hélice dans des conditions standards, c'est à dire dans un écoulement amont uniforme parallèle à l'axe de l'hélice. Ces performances serviront à identifier les interactions avec la carène en comparant les performances derrière carène à celles mesurées en eau libre. Ces essais sont réalisés sur un montage où le carter d'entraînement est en dard amont. Ces essais peuvent être réalisés soit en bassin de traction soit en tunnel. Dans certains cas, si l'hélice est utilisée dans des essais d'autopropulsion, il peut être préférable de réaliser un essai d'eau libre en bassin, à la même vitesse que celle de l'essai d'autopropulsion, et à la même immersion que sur le modèle.



Dans ces essais, la vitesse veine  $V_a$ , la poussée  $T$ , le couple  $Q$  et le nombre de tour  $n$ , sont mesurés. Ces mesures sont exploitées pour générer les courbes de  $K_t, K_q, \eta$ , en fonction de  $J$ . Ces données sont généralement indiquées par "o" pour identifier les valeurs en eau libre avec  $J_0 = \frac{V_a}{nD}$



Dans la procédure de prévision du point de fonctionnement au réel, les données d'eau libre mesurées en bassin ou en tunnel sont extrapolées au réel. On fait dans ce cas des corrections sur  $K_t$  et  $K_q$ . Les corrections de  $K_t$  sont en général très faibles. Les corrections sur  $K_q$  sont significatives et conduisent à une amélioration du rendement de l'hélice à cause de la réduction du frottement à  $Re$  élevé.

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 4

### COURBE DE RESISTANCE

Par ailleurs, comme on connaît la résistance de la carène seule au réel à la vitesse choisie pour le point d'autopropulsion ( $R_{t_r}$ ) on peut construire une courbe  $K_r(J)$  :

$$K_r(J) = \frac{R_{t_r}}{\rho_r n_r^2 D_r^4} = \frac{R_{t_r}}{\rho_r D_r^2 V_r^2} \frac{V_r^2}{n_r^2 D_r^2} = \left( \frac{R_{t_r}}{\rho_r D_r^2 V_r^2} \right) J_r^2$$

Connaissant la résistance totale au réel, le diamètre, et la vitesse du navire au réel, on peut calculer la courbe  $K_r(J) = Cte \cdot J^2$  et la porter dans le diagramme d'eau libre. Cette courbe correspond à la résistance du navire à une vitesse navire donnée, adimensionnée en utilisant une vitesse de référence basée sur la vitesse tangentielle de l'hélice. Pour n'importe quelle valeur de  $J$ , la valeur de  $K_r$  correspondante donne la résistance de la carène au réel.

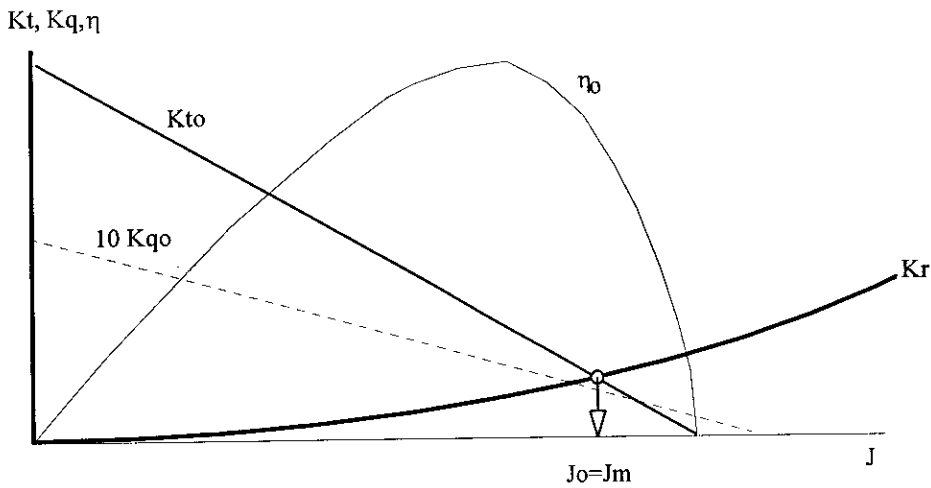
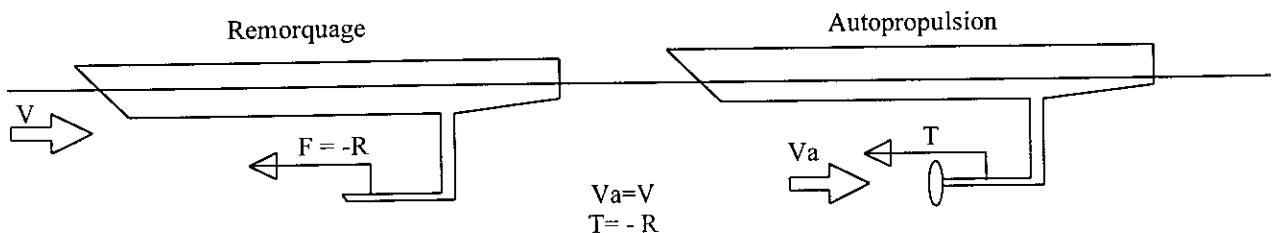


Diagramme  $K_t, K_q, J$  avec  $K_r$

En première approximation, on trouve le point de fonctionnement ( $J$ ) quand la poussée de l'hélice en eau libre est égale à la traînée du navire, c'est à dire à l'intersection des courbes  $K_r$  et  $K_t$ : la poussée de l'hélice est égal à la traînée du navire. Cela est vrai uniquement si il n'y a aucune interaction entre la carène et le propulseur, c'est à dire si la carène n'affecte pas la vitesse dans l'hélice et si la génération de poussée ne modifie pas la traînée de la carène.

Exemple de configuration sans interaction hélice - carène

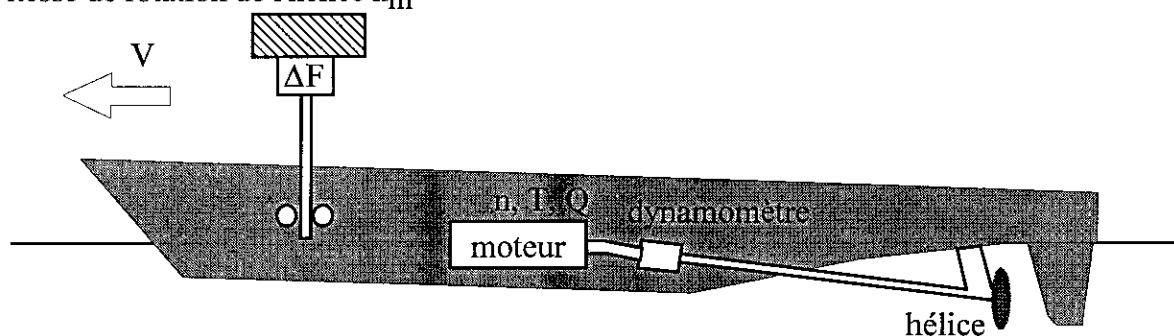


Cette configuration n'est pas réaliste, et souvent les interactions sont importantes. Pour les identifier on procède à un essai d'autopropulsion.

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 5

### ESSAI D'AUTOPROPULSION

L'essai d'autopropulsion a pour but de mesurer les performances de l'hélice (poussée, couple) montée sur la carène. La maquette est équipée de sa (ses) ligne(s) d'arbre, de dynamomètres, et d'une motorisation capable d'entraîner la (les) hélice(s). Conformément à une procédure de dépouillement généralement utilisée (la méthode dite "Anglaise"), la maquette est tractée au travers d'une jauge de manière similaire aux essais de traction, en similitude de Froude à une valeur de la vitesse. La vitesse de rotation de la ligne d'arbre est modulée pour couvrir une gamme relativement étendue de poussée. On note lors de cet essai, l'effort sur la jauge de traction  $\Delta F$ , la poussée sur l'arbre  $T_m$  le couple sur l'arbre  $Q_m$ , la vitesse de rotation de l'hélice  $n_m$



Pour toutes les vitesses de rotation auxquelles des mesures ont été faites on construit les coefficients suivants que l'on peut alors tracer dans le plan  $J, K_t, K_q$

Paramètre d'avance:  $J_m = \frac{V_m}{n_m D_m}$

Coef. résistance vaincue:  $K_v(J_m) = \frac{Rt_m - \Delta F(n_m)}{\rho_m n_m^2 D_m^4}$

Coef. de poussée hélice:  $K_{t_m}(J_m) = \frac{T_m(n_m)}{\rho_m n_m^2 D_m^4}$

Coef. de couple hélice:  $K_{q_m}(J_m) = \frac{Q_m(n_m)}{\rho_m n_m^2 D_m^5}$

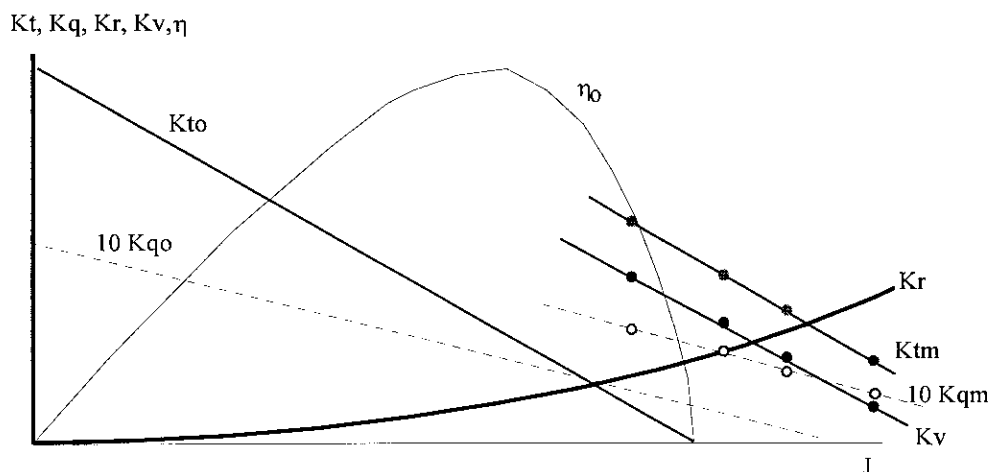


Diagramme d'autopropulsion

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 6

### POINT DE FONCTIONNEMENT

Le point de fonctionnement est obtenu à l'intersection des courbes de  $K_r$  et de  $K_v$ . Comme  $K_r$  est basé sur la résistance au réel, la valeur de  $\Delta F$  n'est pas nulle en ce point. En fait, au point d'autopropulsion ainsi choisi, la plate-forme exerce un effort de poussée sur la maquette qui est dû au fait que la traînée visqueuse est plus importante au modèle qu'au réel. L'intérêt de cette technique réside dans le fait que les interactions hélice-carène sont identifiées à un chargement (poussée par unité de surface) qui est en similitude avec le réel. On peut par ailleurs estimer  $\Delta F$  au point d'autopropulsion:

$$\Delta F_{\text{auto}} = \frac{1}{2} \rho_m S_m V_m^2 \cdot (C_{t_m} - C_{t_r}) = \frac{1}{2} \rho_m S_m V_m^2 ((1+k) \cdot (C_{fo_m} - C_{fo_r}) + \Delta C_a + \Delta C_f)$$

C'est donc l'intersection de  $K_r$  et de  $K_v$  (point noir) qui nous donne le  $J_n$ , le  $J$  navire qui correspond à l'autopropulsion ainsi que le  $K_{t_m}(J_m)$ , et le  $K_{q_m}(J_m)$ , la poussée et le couple sur l'hélice pour ce point de fonctionnement.

On cherche maintenant à faire correspondre au point de fonctionnement navire, le point de fonctionnement équivalent de la même hélice en eau libre. Le passage de l'autopropulsion à l'eau libre se fait par la conservation du  $K_t$ :

$$K_{t_m}(J_m) = K_{t_0}(J_0)$$

Ceci nous permet de définir le paramètre d'avance de l'hélice ( $J_0$ ), et les performances en eau libre à la même poussée:  $K_{q_0}(J_0)$ , et  $\eta_0(J_0)$ . Le problème du point de fonctionnement est résolu. Il reste à identifier les interactions et les rendements.

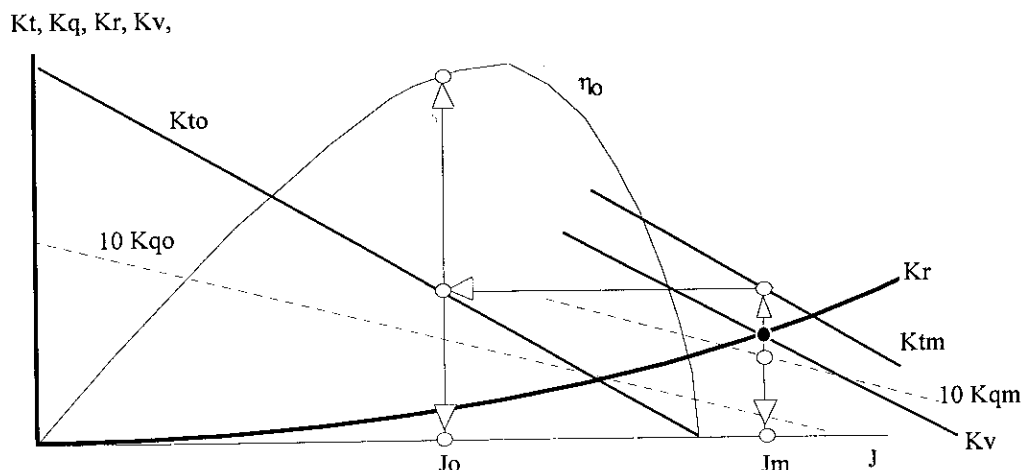


Diagramme d'autopropulsion avec point de fonctionnement  
(ce graphe est établi pour une vitesse et une résistance totale au réel)

On note que la méthode d'analyse des essais d'autopropulsion que l'on présente ici de manière succincte a été simplifiée en ce qui concerne les problèmes d'extrapolation des performances de l'hélice de manière à faire apparaître plus clairement le principe de cette méthode. Pour une discussion plus détaillée des méthodes d'extrapolation, il faut se référer à d'autres références tels que les actes de l'ITTC.

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 7

### DEFINITION DES RENDEMENTS

Les essais d'autopropulsion extrapolés fournissent les données suivantes:

- $J_m$  : paramètre d'avance basé sur la vitesse de la carène
- $K_{t_m}$  : la poussée de l'hélice derrière la carène
- $K_{q_m}$  : le couple de l'hélice derrière la carène
- $J_o$  : paramètre d'avance de l'hélice
- $K_{q_o}$  : le couple de l'hélice en eau libre à  $K_{t_o}=K_{t_m}=K_t$
- $\eta_o$  : rendement de l'hélice en eau libre à  $K_{t_o}=K_{t_m}=K_t$

On définit maintenant le rendement propulsif de manière classique:

$$\eta_p = \frac{R.V}{\omega Q} \quad \text{où}$$

$R.V$  est la "puissance utile" ou "effective horsepower"

$\omega Q$  est la "puissance à l'arbre" ou "delivered horsepower"

On fait apparaître les performances de l'hélice en eau libre:

$$\eta_p = \frac{R.V}{\omega Q} = \frac{R}{T} \cdot \frac{V}{V_a} \cdot \frac{Q_o}{Q} \cdot \frac{T.V_a}{\omega Q_o}$$

On définit ainsi trois paramètres d'interaction à partir de ces relations:

$$\frac{R}{T} = \frac{K_r}{K_t} = 1 - t \quad \text{où } t \text{ est le "coefficient de suction" ou "thrust deduction factor"}$$

$$\frac{V}{V_a} = \frac{J_m}{J_o} = \frac{1}{1 - w} \quad \text{où } w \text{ est le "coefficient de sillage" ou "wake fraction"}$$

$$\frac{Q_o}{Q} = \frac{K_{q_o}}{K_q} = \eta_r \quad \text{où } \eta_r \text{ est le "rendement d'adaptation" ou "relative rotative efficiency"}$$

On reconnaît enfin le rendement de l'hélice en eau libre:

$$\frac{T.V_a}{\omega Q_o} = \eta_o$$

On peut alors écrire le rendement propulsif de la manière suivante

$$\eta_p = \frac{1 - t}{1 - w} \cdot \eta_r \cdot \eta_o$$

On définit alors le rendement  $\eta_h = \frac{1 - t}{1 - w}$ , le "rendement de coque" ou "hull efficiency"

On a alors:  $\eta_p = \eta_h \cdot \eta_r \cdot \eta_o$

Le rendement propulsif global prend en compte différentes pertes dans la ligne d'arbre, en particulier dans le réducteur, les paliers, et le presse-étoupe. Ces pertes sont rassemblées dans un rendement mécanique  $\eta_m$  qui est d'environ 0.97 pour un navire avec réducteur et de longues lignes d'arbre:

$\eta_{pg} = \eta_m \eta_h \cdot \eta_r \cdot \eta_o$
-------------------------------------------------------

## PROPULSION ET RENDEMENTS - 8

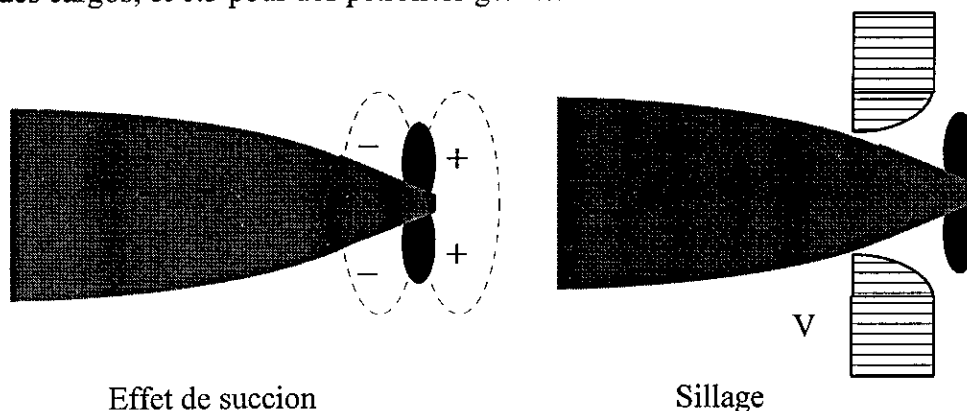
### INTERPRETATION PHYSIQUE ET VALEURS USUELLES

#### 1-t

Le coefficient de succion représente la différence entre la poussée fournie par l'hélice et la résistance du navire. Il s'avère qu'en général, l'hélice a besoin de fournir une poussée supérieure à la traînée du navire. En effet, l'action de l'hélice qui est derrière le navire consiste à accélérer l'écoulement sur les formes arrières ce qui génère des pressions, et une traînée de pression qui n'existe pas lors des essais de remorquage. Les valeurs usuelles du coefficient de succion sont comprises entre 0 et 0.15.

#### 1-w

Le coefficient de sillage représente la différence entre la vitesse perçue par l'hélice et la vitesse du navire. En général, l'écoulement dans le disque de l'hélice est moins rapide que la vitesse du navire. En effet, la carène génère un sillage visqueux qui alimente l'hélice qui est généralement située derrière la carène. Les valeurs usuelles de coefficient de sillage se situent entre 1.0 et 0.9 pour des navires rapides ou de type frégate, entre 0.6 et 0.8 pour des sous-marins ou des cargos, et 0.5 pour des pétroliers géants.



#### **Rendement de coque**

Le rendement de coque n'a pas de signification physique car il ne représente pas le rapport entre 2 énergies. Il est généralement supérieur à 1.0 et permet de juger si l'interaction entre la carène et le propulseur est plus ou moins favorable.

#### **Rendement d'adaptation**

Le rendement d'adaptation est le rapport des couples absorbés par l'hélice à poussée égale lorsqu'elle travaille dans un écoulement uniforme et dans le sillage du navire. Il est intéressant de noter que même pour des sillages particulièrement non-homogènes ce rapport est très voisin de 1.0, avec des écarts toujours inférieurs à 0.05, et fréquemment inférieurs à 0.02.

#### **Rendement global**

Compte tenu des rendements d'hélice (0.6 à 0.75), les rendements propulsifs sont de l'ordre de 0.65 à 0.80 pour des bâtiments de surface. Compte tenu des sillages importants que l'on trouve sur les sous-marins, les rendements propulsifs peuvent atteindre 0.90. Sur certains corps sous-marins dont la traînée est fortement modifiée par l'action du propulseur, le rendement propulsif peut atteindre et même dépasser 1.0.

## **6. SERIES SYSTEMATIQUES**

## SERIES SYSTEMATIQUES - 1

### SERIE B (Troost)

La première approche disponible pour concevoir une hélice a été l'utilisation d'abaques compilées sur la base de nombreux essais. Il existe plusieurs séries systématiques disponibles: celles de Burrell, Gawn, Troost, et plus récemment celle de la compagnie KAMEWA. Les séries systématiques sont généralement constituées à partir de sections standards (épaisseur et cambrure), et de lois d'épaisseur, de corde, et de pas constantes. La génération des modèles d'hélice consiste alors à faire des homothéties sur la loi de corde et la loi de pas pour faire varier la surface et le pas. Le nombre de pales est aussi pris en compte. Les sections sont inchangées et ont une gamme de coefficient de portance optimale. Si le chargement de l'hélice correspond à des coefficients de portance dans cette gamme, l'hélice est proche d'un optimum. Si, par contre l'hélice est trop ou pas assez (généralement trop) chargée par rapport à ces valeurs de  $C_z$ , l'abaque n'est pas bien adaptée. Ainsi, si l'utilisation d'abaques est très utile pour "dégrossir" un projet, il faut être conscient que les paramètres sont optimum dans la limite de l'adaptation des sections. On présente ici une des séries systématiques existantes, la série B ou la série de Troost qui a été compilée à NSMB (maintenant MARIN) à Wageningen, Hollande. C'est une des plus complète (120 modèles testés); elle est bien documentée, et a récemment fait l'objet d'un re-dépouillement minutieux.

Pour exploiter les abaques des essais systématiques d'hélice on utilise des coefficients de puissance. L'utilisation de coefficients de puissance permet de rechercher une hélice "optimale" à partir d'une estimation de la puissance embarquée. Pour faciliter cette recherche on définit 2 coefficients de puissance selon que l'on dispose soit du nombre de tour, soit du diamètre.

On définit le coefficient de puissance, indépendamment du nombre de tour de la manière suivante:  $C_p = \frac{P}{\rho D^2 V^3}$

$$C_p = \frac{\omega Q}{\rho D^2 V^3} = \frac{2\pi n Q}{\rho D^2 V^3} = 2\pi \frac{Q}{\rho n^2 D^5} n^2 D^5 \frac{n}{D^2 V^3} = 2\pi K_Q \frac{D^3 n^3}{V^3}$$

$$\Rightarrow C_p = 2\pi K_Q / J^3$$

Pour éliminer la présence du diamètre dans le calcul de  $C_p$ , et dans le cas où l'on connaît la vitesse de rotation, on définit  $C'_p$  de la manière suivante:

$$C'_p = \frac{P}{\rho D^2 V^3} \cdot \left(\frac{nD}{V}\right)^2 = \frac{P n^2}{\rho V^5} = 2\pi \frac{Q n^3}{\rho V^5} = 2\pi \frac{Q}{\rho n^2 D^5} n^2 D^5 \frac{n^3}{V^5}$$

$$\Rightarrow C'_p = \frac{P n^2}{\rho V^5} = 2\pi K_Q / J^5$$

La formulation exacte utilisée dans la série B est la suivante

$$B_{P_2} = \left(\frac{C_p}{2\pi}\right)^{1/4} = K_Q^{1/4} J^{-3/4} \quad (\text{sans } n)$$

$$B_{P_1} = \left(\frac{C'_p}{2\pi}\right)^{1/4} = K_Q^{1/4} J^{-5/4} \quad (\text{sans } D)$$

## SERIES SYSTEMATIQUES - 2

### GENERATION DES TABLES

Les données obtenues lors des essais sont présentées sur un graphe pour un nombre de pale et une fraction de surface donnée (B 4-85 pour une 4 pales de fraction de surface 0.85 par exemple). Ce graphe est constitué à partir d'essais en eau libre pour plusieurs hélices dont seul le pas change. Les couples ( $J$ ,  $Kq$ ) sont relevés pour une valeur de rendement donnée (pts a,b,c,d,e,f). Ces points sont reportés sur un diagramme (Coefficient de puissance, Pas). On peut alors faire apparaître des isolignes de rendement et des isolignes de  $J$  (ou  $1/J$ ), ainsi que des courbes de rendement optimum à coefficient de puissance donné, ou à  $J$  donné ou encore à  $P/D$  donné..

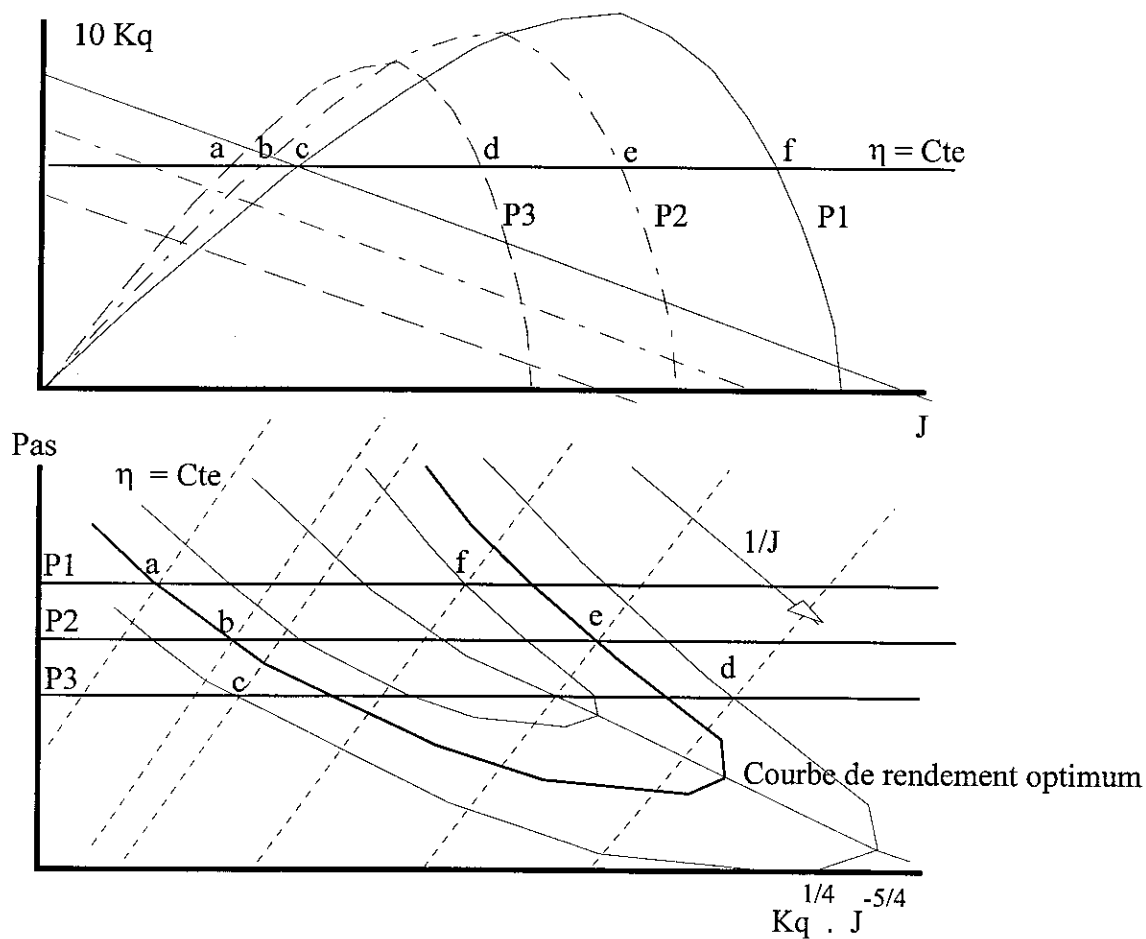


Schéma représentant la génération d'un diagramme coefficient de puissance - pas

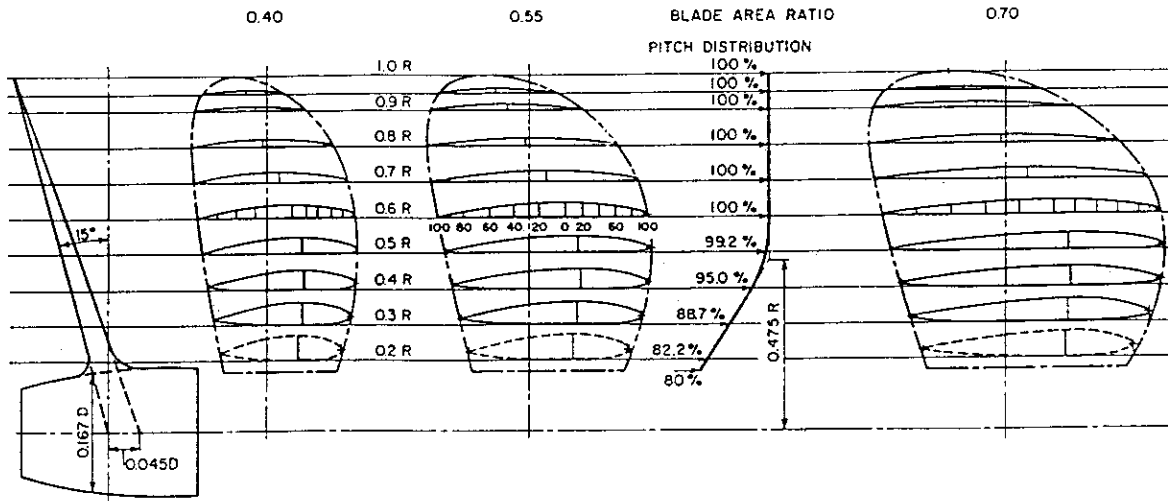
Dans la cas présenté ci-dessus, une fois le coefficient de puissance calculé, indépendamment du diamètre (nombre de tour connu), on obtient le rendement optimal, le pas, et le  $J$ . On en déduit donc une estimation du diamètre "optimal" et une géométrie d'hélice. En fonction du rendement d'hélice obtenu il est souvent nécessaire de réitérer sur la puissance nécessaire.

# SERIES SYSTEMATIQUES - 3

## SERIE B (Troost)

Blade number Z	Blade area ratio $A_E/A_O$									
2	0.30									
3		0.35								
4			0.40							
5				0.45						
6					0.50					
7						0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
								0.80	0.85	1.00
										1.05

Etendue de la base de donnée (Z, Fraction de surface)



Distribution de pas et vue des pales d'hélice (fraction de surface de 0.40, 0.55, 0.70)

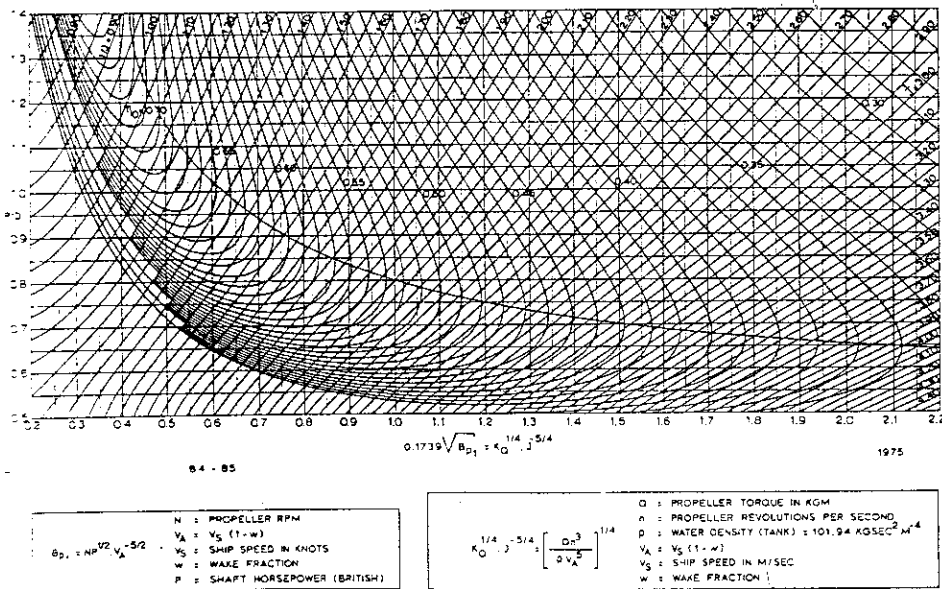


Diagramme (Bp1, Pas) pour les hélices B 4-85  
4 pales, fraction de surface de 0.85

## **7. DISQUE MOTEUR**

# DISQUE MOTEUR - 1

## HELICE ISOLEE

### Hypothèses

- . Disque d'épaisseur négligeable
- . Diamètre du disque est celui du propulseur
- . Vitesse amont uniforme
- . On considère un tube de courant du diamètre du disque dans le plan du disque
- . L'action du disque est de générer un saut de pression  $\Delta P$  uniforme
- . On considère que l'écoulement est bidimensionnel
- . On néglige les vitesse radiales

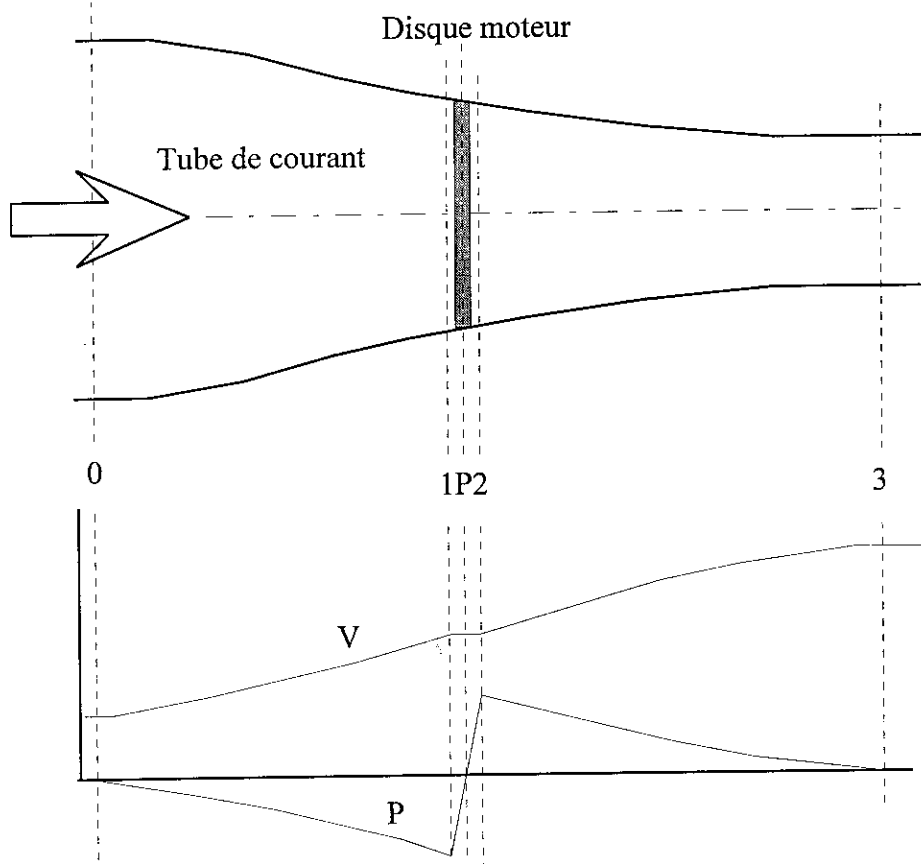


Schéma de la représentation du disque moteur 1D

Pression	$P_0$	$P_1$	$P_2 = P_1 + \Delta P$	$P_3 = P_0$
Vitesse	$V_0$	$V_1 = V_p = V_2$		$V_3$
Aires	$A_0$	$A_1 = A_p = A_2$		$A_3$

Poussée : QDM sur ② ③  $\rightarrow T_{0-3} = \dot{m}(V_3 - V_0)$   
 QDM sur ① ②  $\rightarrow T_{1-2} = \Delta P \cdot A_p$

Débit  $\dot{m} = \rho A_p V_p$

## DISQUE MOTEUR - 2

### HELICE ISOLEE (suite)

Bernoulli ① → ②

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2$$

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho V_P^2$$

Bernoulli ② → ③

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2$$

$$P_1 + \Delta P + \frac{1}{2}\rho V_P^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_3^2$$

Saut de pression

$$\rightarrow \Delta P = \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_0^2)$$

Poussée

$$\text{QDM sur } ① \text{ } ③ \rightarrow T_{0-3} = \rho A_P V_P (V_3 - V_0)$$

$$\text{QDM sur } ① \text{ } ② \rightarrow T_{1-2} = \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_0^2) \cdot A_P$$

$$\rightarrow \rho A_P V_P (V_3 - V_0) = \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_0^2) A_P$$

$$2V_P = V_3 + V_0$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{V_3 + V_0}{2}$$

On a donc dans le disque la moyenne des vitesses amont et aval.

Coefficient de poussée

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho A_P V_0^2} = \frac{\frac{1}{2}\rho A_P (V_3^2 - V_0^2)}{\frac{1}{2}\rho A_P V_0^2} = \frac{V_3^2}{V_0^2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_0} = \sqrt{C_T + 1} \text{ et } \frac{V_P}{V_0} = \frac{1}{2}(\sqrt{C_T + 1} + 1)$$

Rendement

$$\text{Puissance utile: } T \cdot V_0 \text{ ou } T_{1-2} = \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_0^2) \cdot A_P$$

$$\text{Puissance dissipée: Energie cinétique dans le sillage: } \frac{1}{2}\dot{m}(V_3^2 - V_0^2).$$

$$\eta_i = \frac{T \cdot V_0}{\frac{1}{2}\rho A_P V_P (V_3^2 - V_0^2)} = \frac{\frac{1}{2}\rho A_P (V_3^2 - V_0^2) V_0}{\frac{1}{2}\rho A_P V_P (V_3^2 - V_0^2)}$$

$$\eta_i = \frac{V_0}{V_P} = \frac{2V_0}{V_3 + V_0} = \frac{2}{1 + \frac{V_3}{V_0}} = \frac{2}{1 + \sqrt{C_T + 1}}$$

## DISQUE MOTEUR - 3

### HELICE CARENEE

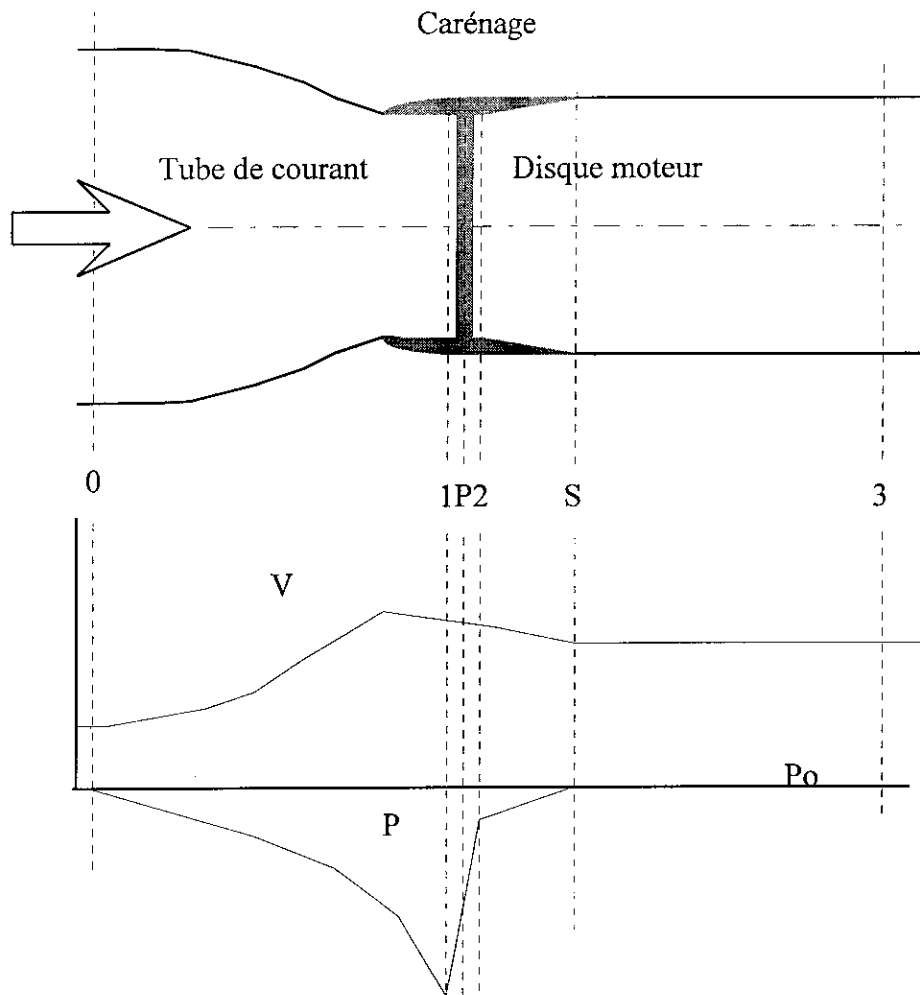


Schéma de la représentation du disque moteur caréné

Poussée : QDM sur ① ③  $\rightarrow T_{0-3} = T_T = \dot{m}(V_3 - V_0)$  : poussée totale  
 QDM sur ① ②  $\rightarrow T_{1-2} = T_D = \Delta P \cdot A_P$  : poussée du disque

Débit  $\dot{m} = \rho A_P V_P$

Saut de pression

$$\rightarrow \Delta P = \frac{1}{2} \rho (V_3^2 - V_0^2)$$

Poussée

QDM sur ① ③  $\rightarrow T_T = \rho A_P V_P (V_3 - V_0)$  : Poussée totale (disque + tuyère)

QDM sur ① ②  $\rightarrow T_D = \frac{1}{2} \rho (V_3^2 - V_0^2) \cdot A_P$  : Poussée du disque

Rapport des poussées:

On définit le rapport entre la poussée du disque et la poussée totale  $\mathfrak{F} = \frac{T_D}{T_T}$

## DISQUE MOTEUR - 4

### HELICE CARENEE (suite)

#### Rapport des efforts

$$\mathfrak{J} = \frac{T_D}{T_T} = \frac{\frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_0^2)A_P}{\rho A_P V_P (V_3 - V_0)} = \frac{(V_3 + V_0)}{2V_P}$$

$$\frac{V_P}{V_0} = \frac{\left(1 + \frac{V_3}{V_0}\right)}{2\mathfrak{J}}$$

#### Coefficient de poussée

$$C_T = \frac{T_D / \mathfrak{J}}{\frac{1}{2}\rho A_P V_0^2} = \frac{\frac{1}{2}\rho A_P (V_3^2 - V_0^2)}{\frac{1}{2}\rho A_P V_0^2 \mathfrak{J}} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \left( \frac{V_3^2}{V_0^2} - 1 \right)$$

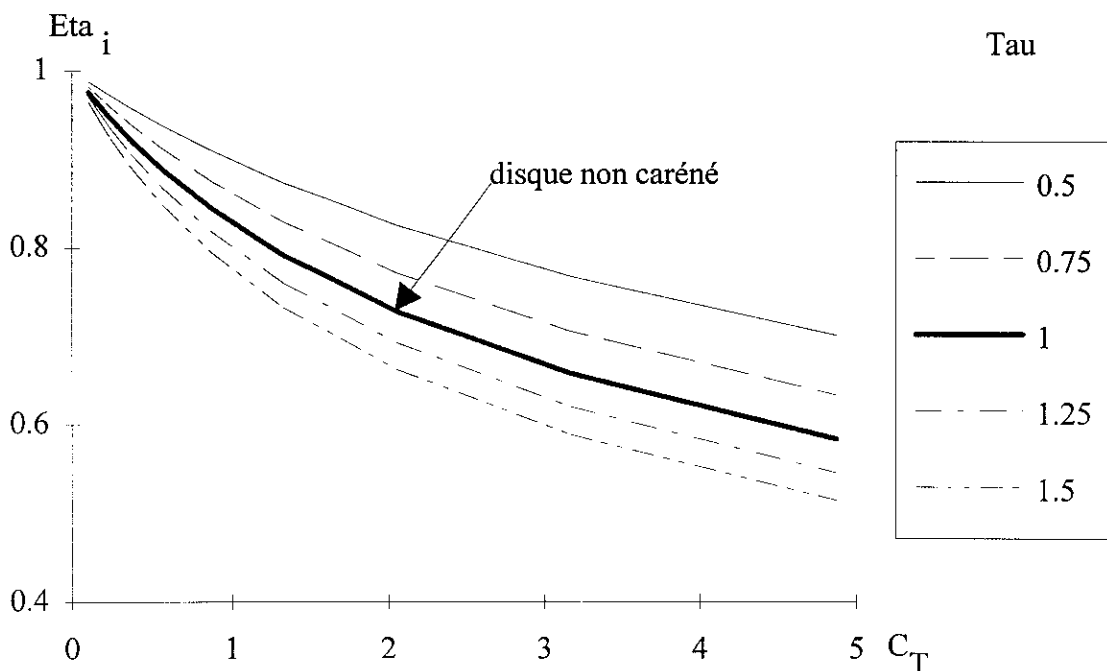
$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_0} = \sqrt{\mathfrak{J} C_T + 1}$$

#### Rendement

$$\eta_i = \frac{T_T \cdot V_0}{\Delta KE} = \frac{\frac{T_P}{\mathfrak{J}} \cdot V_0}{\frac{1}{2}\rho A_P V_P (V_3^2 - V_0^2)} = \frac{\frac{1}{2}\rho A_P V_0 (V_3^2 - V_0^2)}{\mathfrak{J} \frac{1}{2}\rho A_P V_P (V_3^2 - V_0^2)}$$

$$= \frac{V_0}{\mathfrak{J} V_P} = \frac{V_0}{\mathfrak{J} \left( \frac{V_3 + V_0}{2\mathfrak{J}} \right)} = \frac{2}{\left( 1 + \frac{V_3}{V_0} \right)}$$

$$\eta_i = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \mathfrak{J} C_T}} \quad \mathfrak{J} = 1 \Rightarrow \text{comme sans tuyère}$$



Evolution du rendement idéal en fonction du chargement et du rapport des poussées.

## DISQUE MOTEUR - 5

### HELICE CARENEE (suite)

Si l'on fait l'hypothèse que la sortie de la tuyère est adaptée, c'est à dire qu'elle correspond à la pression ambiante, le plan aval 3 correspond à la sortie de la tuyère. On peut donc étudier comment la section de sortie de la tuyère détermine le fonctionnement du propulseur caréné.

Continuité:

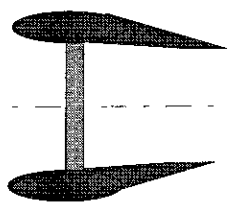
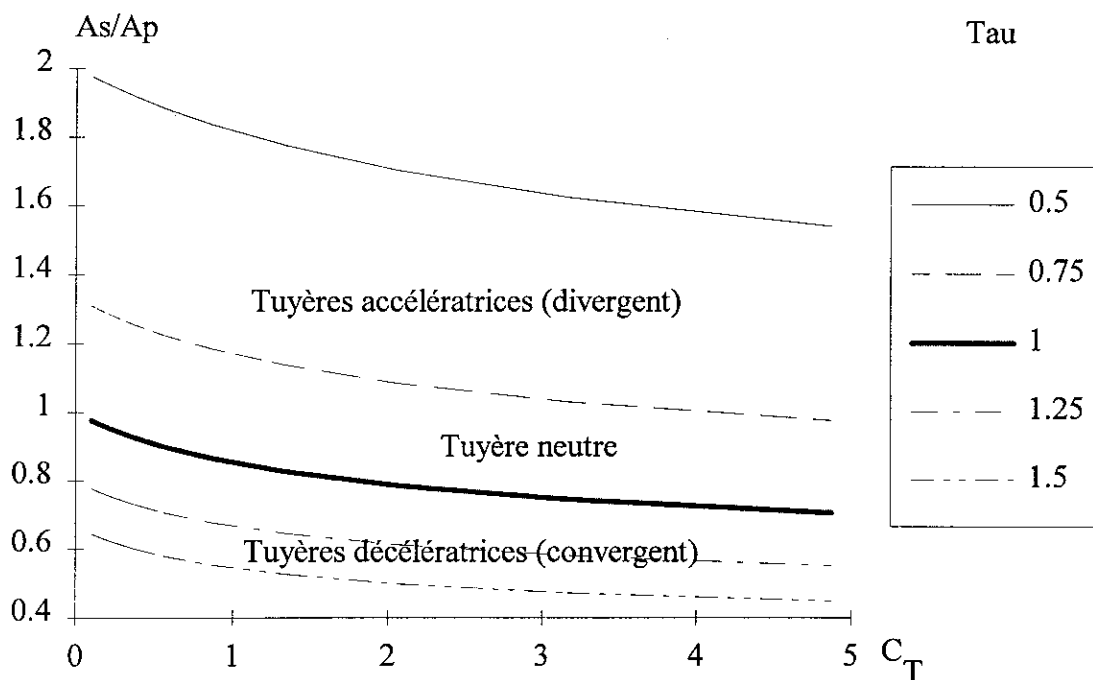
$$\frac{A_P}{A_S} \cong \frac{A_P}{A_3} = \frac{V_3}{V_P}$$

Analyse du disque moteur caréné:

$$\frac{V_3}{V_0} = \sqrt{3C_T + 1} \quad \text{et} \quad \frac{V_P}{V_0} = \frac{1 + \sqrt{3C_T + 1}}{2\sqrt{3}}$$

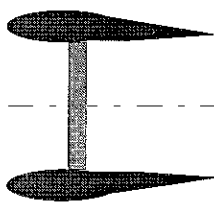
Rapport d'aires disque/sortie

$$\frac{A_S}{A_P} = \frac{1 + \sqrt{3C_T + 1}}{2\sqrt{3}\sqrt{3C_T + 1}}$$



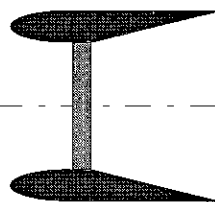
Tuyère décélératrice  
 $\tau > 1.0$

Poussée tuyère < 0



Tuyère neutre  
 $\tau = 1.0$

Poussée tuyère = 0



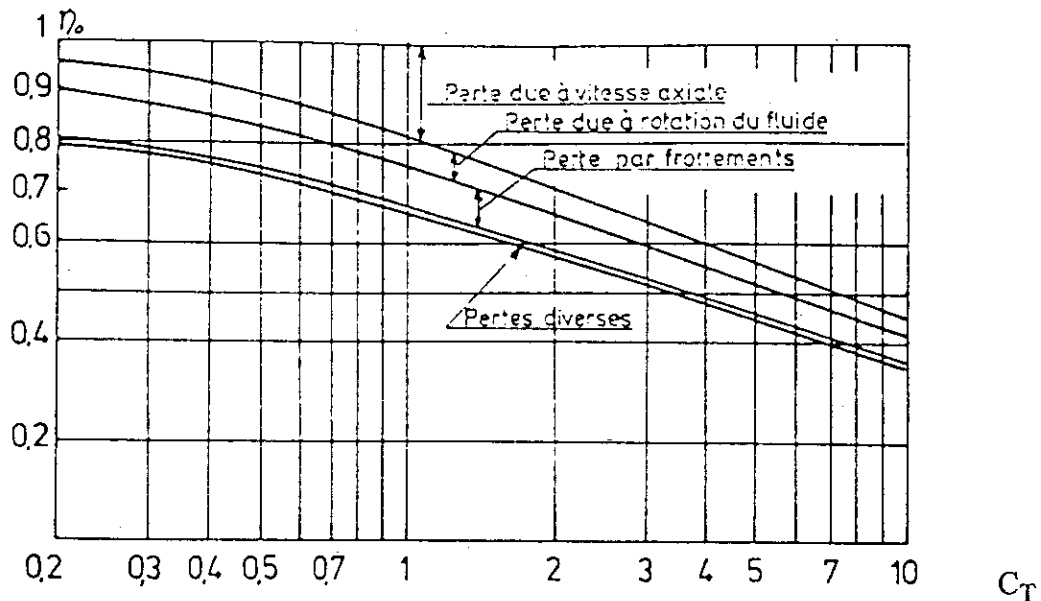
Tuyère accélératrice  
 $\tau < 1.0$

Poussée tuyère > 0

## DISQUE MOTEUR - 6

### RENDEMENT REEL

Les calculs du rendement idéal présentés jusqu'ici ne prennent en compte que les pertes d'énergies cinétiques axiales induites par la génération de poussée. On peut identifier deux sources supplémentaires de pertes de d'énergie dans la génération de poussée. Celles-ci sont indiquées en fonction du coefficient de chargement sur le graphe ci-dessous. Ce graphe correspond au cas des hélices de 4 ou 5 pales avec des fractions de surface de 0.5 à 0.7.



Pertes d'énergie cinétique de rotation. En effet, les propulseurs sont des machines tournantes qui en général, génèrent dans le sillage une rotation importante, et donc une énergie cinétique due aux vitesses tangentielles. Ce sillage a globalement une quantité de mouvement angulaire qui correspond au couple appliqué au fluide par le propulseur. Certains propulseurs sont constitués de plusieurs éléments, notamment de couples stator/rotor, et par conséquent ont des pertes de rotation limitées. Les hélices contrarotatives ont l'avantage de d'éliminer les pertes dues aux vitesses tangentielles à l'aide de surfaces qui sont chargées et fournissent de la poussée, contrairement aux stators qui ne font que de générer du frottement. On peut aussi signaler que les appendices en amont ou en aval du propulseur peuvent contribuer à réduire ces pertes. On peut en effet concevoir des bras de chaises ou des bulbes arrière qui créent une pré-rotation. Un safran situé en aval de l'hélice joue aussi le rôle de redresseur ce qui réduit sa traînée.

Pertes d'origine visqueuse. On peut scinder les pertes d'origine visqueuses en 2 catégories, celles dues aux décollements, et celles dues au frottement. Pour des propulseurs bien dessinés, on ne doit pas trouver de décollement en fonctionnement nominal à l'exception du bord de fuite. Par contre, pour des points de fonctionnement extrêmes (poussée au point fixe, manoeuvres..), cela est possible. En ce qui concerne les pertes dues au frottement, celles-ci sont inévitables. On peut néanmoins les limiter en réduisant la surface mouillée du propulseur (diamètre, fraction de surface) et donc en augmentant le chargement du disque et des pales. En ce qui concerne les propulseurs carénés, cette composante est plus importante compte tenu de la surface mouillée des tuyères. Il en résulte que l'utilisation de tuyère sur des hélices afin d'améliorer le rendement est limitée aux basses vitesses et forts chargements: remorqueurs, pousseurs, chalutiers...

## HELICE CARENEE AVEC FROTTEMENT

Si on prend  $\Delta P_f = K \frac{1}{2} \rho V_0^2$

Saut de pression

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho (V_3^2 - V_0^2 (1 - K))$$

Poussée

$$T_P = \frac{1}{2} \rho (V_3^2 - V_0^2) A_P$$

$$T = \rho A_P V_P (V_3 - V_0)$$

$$\mathfrak{T} = \frac{T_P}{T} = \frac{\frac{1}{2} \rho (V_3^2 - V_0^2) A_P}{\rho A_P V_P (V_3 - V_0 (1 + K))}$$

$$= \frac{1}{2 V_P} \left[ (V_3 + V_0) + \frac{K V_0^2}{(V_3 - V_0)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{V_P}{V_0} = \frac{1}{2 \mathfrak{T}} \left[ 1 + \frac{V_3}{V_0} + \frac{K}{\left( \frac{V_3}{V_0} - 1 \right)} \right]$$

Coefficient de poussée

$$C_T = \frac{T_P / \mathfrak{T}}{\frac{1}{2} \rho A_P V_0^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho A_P (V_3^2 - V_0^2 (1 - K))}{\mathfrak{T} \frac{1}{2} \rho A_P V_0^2}$$

$$C_T = \frac{1}{\mathfrak{T}} \left( \left( \frac{V_3}{V_0} \right)^2 + K - 1 \right)$$

$$\frac{V_3}{V_0} = \sqrt{\mathfrak{T} C_T + 1 - K}$$

Rendement:

$$\eta_i = \frac{T V_0}{\Delta KE} = \frac{T_P / \mathfrak{T} \cdot V_0}{\frac{1}{2} \rho A_P V_P (V_3^2 - V_0^2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \rho A_P (V_3^2 - V_0^2 (1 - K)) V_0}{\mathfrak{T} \frac{1}{2} \rho A_P V_P (V_3^2 - V_0^2)}$$

$$= \frac{V_0}{\mathfrak{T} V_P} \left[ \frac{(V_3^2 - V_0^2)}{(V_3^2 - V_0^2)} + \frac{V_0^2 K}{(V_3^2 - V_0^2)} \right] = \frac{V_0}{\mathfrak{T} V_P} \left[ 1 + \frac{K}{\left( \frac{V_3}{V_0} \right)^2 - 1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \left( 1 + \frac{K}{\mathfrak{J}C_T - K} \right)}{\sqrt{\mathfrak{J}C_T + 1 - K} + 1 + \frac{K}{\sqrt{\mathfrak{J}C_T + K - 1}}} \\
&= \frac{2 \left( \sqrt{\mathfrak{J}C_T + 1 - K} - 1 \right)}{\mathfrak{J}C_T - K}
\end{aligned}$$